PRODUCTIONS SCIENTIFIQUES

CHRISTOPHER-LLOYD SIMON

Liste des (Pré)Publications

[GS20] Étienne Ghys and Christopher-Lloyd Simon. On the topology of a real analytic curve in the neighborhood of a singular point. *Astérisque*, Some aspects of the theory of dynamical systems: a tribute to Jean-Christophe Yoccoz. Vol. I(415):1–33, 2020. HAL version. 2

[MS21] Julien Marché and Christopher-Lloyd Simon. Automorphisms of character varieties. *Ann. H. Lebesgue*, 4:591–603, 2021. arxiv version. 4

[MS24] Julien Marché and Christopher-Lloyd Simon. Valuations on the character variety: Newton polytopes and residual poisson bracket. *Geometry and Topology*, to appear:X–Y, 2024. arxiv version. 4

[Sim22a] Christopher-Lloyd Simon. Linking numbers of modular knots, 2022. Submitted for publication, arxiv version. 3

[Sim22b] Christopher-Lloyd Simon. Topologie et dénombrement des courbes algébriques réelles. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 31(2):383–422, 2022. arxiv version. 2

[Sim23a] Christopher-Lloyd Simon. Conjugacy classes in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. *Mathematics Research Reports*, 4:23–45, 2023. arxiv version. 3

[Sim23b] Christopher-Lloyd Simon. Loops in surfaces, chord diagrams, interlace graphs: operad factorisations and generating grammars, 2023. Submitted for publication, arxiv version. 2

Topologie et combinatoire des courbes algébriques réelles singulières. L'article [GS20], *On the topology of a real analytic curve in the neighborhood of a singular point* (publié dans Astérisque) décrit la topologie des singularités de courbes algébriques réelles en termes d'invariants combinatoires tels que des digrammes de cordes et leurs graphes d'entrelacement.

L'article [Sim22b] *Topologie et combinatoire des courbes algébriques réelles* (publié dans les Annales de la Faculté Scientifique Toulouse) complète cette étude locale en énumérant les types topologiques de singularités de courbes algébriques réelles ainsi que les divers invariants combinatoires associés. Un résultat très important est l'extension aux diagrammes de cordes du théorème de Cunningham décrivant une factorisation unique d'un graphe en arbres de graphes. On fournit ensuite une description globale des courbes algébriques réelles en termes combinatoires, afin de majorer le nombre de types topologiques de courbes algébriques singulières du plan réel en fonction du degré.

Ensemble, ces articles forment une histoire auto suffisante mêlant géométrie algébrique, topologie et combinatoire. Ils forment la base d'investigations ultérieures visant à comprendre la topologie des singularité de surfaces algébriques réelles (par intersection avec une petite sphère on retrouve une courbe algébrique réelle singulière dans la sphère). C'était initialement mon projet de thèse, mais j'ai très tôt changé d'avis, et cela reste donc un sujet ouvert pour l'investigation.

Combinatoire des courbes dans les surfaces. La prépublication [Sim23b] *Loops in surfaces, chord diagrams, interlace graphs: operad factorisations and generating grammars* concerne la topologie et la combinatoire des courbes dans les surfaces, de leurs diagrammes de cordes, et de leurs graphes d'entrelacement. Tout d'abord, on propose des preuves indépendantes des résultats de Rosentiehl caractérisant les diagrammes de cordes provenant de courbes dans le plan, et leurs généralisations en genre supérieur. Ces preuves reposant sur la topologie fournissent une meilleure compréhension des liens entre ces structures combinatoires. Ensuite, on étend les théorèmes d'unique factorisation de Cunningham aux courbes dans les surfaces, complétant en particulier l'espoir de Conway de décrire les nœuds comme compositions d'enchevêtrements. Enfin, on décrit les factorisations associées aux diagrammes de cordes de courbes planes, et fournit une grammaire génératrice pour leurs graphes d'entrelacement. Cela vient contraster le pessimissme d'Arnold sur l'impossibilité de classifier les courbes planes.

Les nouveaux résultats de ce travail (concernant la structure d'opérade et de grammaire des courbes des diagrammes de cordes et de leurs graphes d'entrelacement), ouvrent la voie vers de nombreuses pistes d'investigation. Certaines questions concernent l'énumération, par exemple des courbes planes par nombre de croisement (un problème ouvert d'intérêt pour certains modèles de physique théorique). D'autres concernent l'exploration des invariants facilement calculables ou approchables sur la factorisation d'un diagramme de cordes, et de leurs propriétés asymptotiques ? On établit également un forte analogie entre ces résultats structurels et la classification des variétés de dimension 3 (en particulier des variétés graphées apparaissant dans l'étude des courbes algébriques complexes). Enfin, ce travail est intimement à l'étude des morsifications de courbes algébriques réelles. Ce sont des piste que je souhaiterai vivement explorer d'avantage.

Classes de conjugaisons de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$**.** L'article [Sim23a], *Conjugacy classes in* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (publié dans les Mathematics Research Reports) résume les résultats obtenus et prouve les conjectures ouvertes dans le Chapitre 1 de ma thèse.

On commence par décrire, sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, les orbites de l'action adjointe de groupe de Lie $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Cela conduit à la résolution d'équations de Pell-Fermat généralisées $x^2 - \Delta y^2 = \chi$. Bien que ces résultats puissent sembler familiers, ils ne sont pas couverts de manière aussi générale ou détaillée par la littérature pré-existante. L'approche synthétique permet de changer le corps de base, et nous l'illustrons pour les corps à 3 et 5 éléments, en lien avec la géométrie du tétraèdre et de l'icosaèdre.

On applique ensuite ces résultats pour partitionner l'ensemble des classes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de formes quadratiques binaires entières en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$-classes, pour établir un lien avec la théorie des genres. *Ces résultats sont classiques, mais l'approche géométrique est d'un intérêt indépendant, car elle mène à de nouvelles interprétations géométriques de la composition de Gauss, que l'on pourrait généraliser à des corps globaux plus généraux comme des corps de fonctions.*

Enfin, on fournit une interprétation géométrique de la $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$-équivalence des géodésiques fermées dans l'orbifold modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$, en termes des longueurs d'ortho-géodésiques et des angles d'intersection. Ces quantités géométriques sont liées aux nombres d'enlacement entre les nœuds modulaires. *Leurs propriétés de distribution suscitent actuellement un grand intérêt: elles pourraient être étudiées en utilisant la géométrie du réseau quadratique* $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}), \det)$ *décrite au départ.*

Enlacement des nœuds modulaires. L'article [Sim22a] *Linking numbers of modular knots* (en cours d'évaluation), résume et prolonge les résultats obtenus dans les Chapitres 4 et 5 de ma thèse.

Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur le plan hyperbolique avec pour quotient la surface modulaire $\mathbb{M}$, dont le fibré tangent unitaire $\mathbb{U}$ est une 3-variété homéomorphe au complémentaire du nœud trèfle dans la sphère. Les classes de conjugaison hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ correspondent aux géodésiques orientées fermées de $\mathbb{M}$. Leurs relevés dans $\mathbb{U}$ définissent les nœuds modulaires.

L'enlacement entre un nœud modulaire et le nœud de trèfle est bien compris: Etienne Ghys a montré en 2006 qu'il est donné par l'invariant de Rademacher de la classe de conjugaison associée. La fonction de Rademacher est un quasi-caractère de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ qu'il avait reconnu avec Jean Barge en 1992 comme la moitié de la primitive de la classe d'Euler bornée, éclairant les travaux de Michael Atiyah de 1987 concernant le logarithme de la fonction eta de Dedekind et l'ubiquité de la fonction de Rademacher dans divers domaines des mathématiques.

On aborde ici la question (concluant l'article d'Etienne Ghys) de l'enlacement entre deux nœuds modulaires, en proposant plusieurs formules aux saveurs arithmétique, combinatoire, ou de théorie des représentations. En particulier, on associe à une paire de nœuds modulaires une fonction définie sur la variété de caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, dont la limite au bord retrouve leur nombre d'enlacement. *Ce résultat surprenant a motivé une partie des études arithmétiques de l'article précédent, et c'est une source d'inspiration pour diverses généralisations aux groupes Fuchsiens.*

De plus, on montre comment les fonctions d'enlacement avec les nœuds modulaires fournissent une base de l'espace de Banach des quasi-caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. *C'est à mon sens un résultat novateur: il y a très peu de groupes pour lesquels on dispose d'une base (non-triviale) des quasi-caractères, et le seul pour lequel on en ait une description en termes de périodes, que l'on peut l'interpréter comme une théorie de Fourier pour les quasi-caractères.*

Automorphismes des variétés de caractères. L'article [MS21] *Automorphisms of character varieties* (publié dans les Annales Henri Lebesgue on décrit le groupe des automorphismes de la variété des caractères d'une surface orientable fermée S de caractéristique d'Euler négative, répondant ainsi à une question de Juan Souto.

La variété des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-caractères (du groupe fondamental) de S est le quotient de sa variété des représentations $\mathrm{Hom}(\pi_1(S); \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ par la relation identifiant ρ_1 et ρ_2 lorsque $\operatorname{tr} \rho_1(\gamma) = \operatorname{tr} \rho_2(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$. C'est une variété algébrique affine qui contient une copie Zariski-dense de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$.

De nombreux résultats montrent que le groupe des automorphismes de certaines structures associées à l'espace de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ est essentiellement réduit au groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Diff}(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$.

On décrit le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\, X(S)$ en termes d'une extension du groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S)$ par le groupe fini $H^1(S; \mathbb{Z}/2)$. En passant, on fournit une caractérisation simple des valuations sur l'algèbre de caractères provenant des laminations mesurées.

Cet article est court, mais les méthodes mêlent géométrie algébrique (valuations), topologie (laminations mesurées) et géométrie des groupes (actions sur des arbres réels), reposant sur des résultats difficiles dans chacun de ces domaines. C'est également une première application des méthodes développées dans l'article suivant, motivant ainsi leur l'introduction.

Compactifications des variétés de caracères. L'article [MS24] *Valuations on the character variety: Newton polytopes and residual poisson bracket* (à paraître dans Geometry and Topology) concerne la compactification de la variété des caractères d'une surface orientable compacte sans bord S, et la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ de son groupe fondamental.

Plus précisément, on introduit une compactification de la variété des caractères par une espace de valuations, qui s'indentifie à l'espace des laminations mesurées ML (c'est l'un des points sur lequel repose l'article précédent), ainsi qu'à certaines actions du groupe $\pi_1(S)$ sur des arbres réels. On établit des équivalences entre des propriétés algébriques des valuations, topologiques des laminations mesurées (maximales), combinatoires de arbres réels (trivalents), décrivant la strate de dimension maximale des points lisses de ML.

On définit l'espace tangent en une telle valuation, et montre comment le crochet de Poisson décrit par Goldman sur la variété de caractères induit une structure symplectique sur ce modèle valuatif. On identifie cet espace symplectique avec les constructions antérieures dues à Thurston et Bonahon. *Cette nouvelle construction ouvre la voie vers une étude algébrique plus fine de la stratification de* ML.

Par ailleurs, on introduit la notion de polytope de Newton d'une fonction algébrique sur la variété de caractères, On prouve entre autres que les fonctions traces ont des coefficients unitaires aux points extrêmaux de leur polytope de Newton. On interprète également, pour deux fonctions sur la variété des caractères, les coefficients de leur crochet de Poisson en les points extrêmaux du polytope de Newton de leur produit de manière algébrique (valeur résiduelle du crochet de Poisson usuel) et combinatoire (dénombrement de signes donnés par des ordres cycliques).

Ce travail fournit un pas vers l'étude des coefficients de structure de l'algèbre des caractères pour la multiplication et le crochet de Poisson.