

# Approximation diophantienne: le théorème du sous-espace en dynamique arithmétique

Groupe de travail IRMAR

2026

## Abstract

Ce mini-cours a pour objectif d'introduire les outils classiques de l'approximation diophantienne, le théorème de Roth, puis le théorème du sous-espace de Schmidt, ainsi que leurs généralisations à plusieurs places et sur un corps de nombres. Une attention particulière sera portée aux liens avec les fractions continues et leur interprétation dynamique et géométrique via la surface modulaire. On en présentera à la fin des applications classiques et modernes, comme sur la transcendance de nombres de faible complexité, et on explorera ses interprétations dynamiques en termes des flots diagonaux dans les groupes de Lie.

## 0 Programme prévisionnel

Environ 12 séances de 1h30, réparties comme suit :

1–2 : Théorèmes de Dirichlet, Minkowski 1, Siegel et de Minkowski 2  
Stéphane LEBORGNE

3–5 : Théorie des hauteurs, mesure de Mahler, théorème de Roth et généralisations à plusieurs places (Ridout) et sur un corps de nombres (Lang, Leveque).  
Serge CANTAT, Sébastien GOUZEL

6–8 : Théorème du sous-espace de Schmidt et généralisation à plusieurs places sur un corps de nombres (Schlickewei).  
François MAUCOURANT, Christopher-Lloyd SIMON

9–10 : Flot géodésique dans la surface modulaire, fractions continuées, spectre de Markov  
Seung uk JANG

11 : Approximation par des nombres quadratiques  
François MAUCOURANT

12 : Application à la transcendance des nombres de faible complexité  
Christopher-Lloyd SIMON

> 12 : Autre applications classiques et modernes

# 1 Références pour les séances

## Séances 1–2 : Dirichlet, Siegel, Minkowski

Lemme de Siegel et applications. Théorème de Minkowski 1 et applications à l'approximation simultanée (Dirichlet). Théorème de Minkowski 2, applications et problèmes ouverts.

- Pour Siegel et Minkowski 1 [[Schmidt, 1967](#), Chapitre 1] et [[Schmidt, 1980](#), Chapitre 2]
- Pour Minkowski 2 : [[Danicic, 1957](#)] [[Henk, 1993](#)]

## Séances 3–5 : Théorème de Roth et généralisations

Bases sur la théorie des hauteurs, mesure de Mahler, Wronskiens, polynômes clés. Théorème de Roth, généralisation à plusieurs places (Ridout) et sur un corps de nombres (Lang, Leveque).

- La preuve de Roth est complète dans [[Schmidt, 1980](#), Chapitre 3]
- Survol détaillé de la preuve de Roth et Lang dans [[Schmidt, 1967](#), Chapitre 2]
- Bases pour la preuve de Ridout, Lang, Leveque: [[Goel et al., 2025](#), Section 2]
- Preuve de Roth-Ridout-Lang-Leveque: [[Goel et al., 2025](#), Section 3]

## Séances 6–8 : Théorème du sous-espace de Schmidt et généralisations

Théorème du sous-espace de Schmidt, généralisations à plusieurs places et sur un corps de nombre. Au choix: soit une preuve détaillée soit un survol de la preuve et des applications.

- Preuve de Schmidt [[Schmidt, 1980](#), Chapitres 6]
- Survol de Schmidt-Schlickewei [[Schmidt, 1967](#), Chapitre 5]
- Preuves de Schmidt et Schlickewei [[Goel et al., 2025](#), Sections 4 et 5]
- Pour les applications [[Bilu, 1998](#), [Corvaja and Zannier, 2003](#), [Schlickewei et al., 2008](#)]

## Séances 9–10 : Fractions continuées et géodésiques modulaires

Flot géodésique sur la surface modulaire, et codage symbolique, lien avec les fractions continuées. Géodésiques fermées sur le tore modulaire, spectres de Markov et de Lagrange.

- [[Series, 1986](#), [Series, 1985](#)]
- [[Sheingorn, 1985](#), [Sheingorn, 1995](#)]
- [[Haas, 1986](#), [Haas and Susskind, 1998](#)]

## Séance 11 : Approximation des réels par des quadratiques

Approximation par des quadratiques: théorème de Davenport–Schmidt, et résultats de Roy.

- [Davenport and Schmidt, 1967]
- [Roy, 2011]

## Séance 12 : Applications à la transcendance et géodésiques simples

Applications du théorème du sous-espace à la transcendance des nombres aux fractions continuées palindromiques ou de faible complexité.

- [Adamczewski and Bugeaud, 2007] [Lin, 2017]
- [Adamczewski and Bugeaud, 2009]

## Pour aller plus loin: autres applications et points de vue sur le sous-espace

Equations en  $S$ -unités, points entiers sur les variétés, suites récurrentes linéaires et théorème de Skolem–Mahler–Lech, équations fonctionnelles de type Mahler,...

- [Bilu, 1998]
- [Corvaja and Zannier, 2003]
- [Schlickewei et al., 2008]
- [Derksen, 2007]
- [de Saxcé, 2024]

# References

- [Adamczewski and Bugeaud, 2007] Adamczewski, B. and Bugeaud, Y. (2007). On the complexity of algebraic numbers. *Annals of Mathematics*, 165(2):547–565.
- [Adamczewski and Bugeaud, 2009] Adamczewski, B. and Bugeaud, Y. (2009). Palindromic continued fractions and transcendence. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 42:1–18.
- [Bilu, 1998] Bilu, Y. (1998). The many faces of the subspace theorem. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2:631–650.
- [Corvaja and Zannier, 2003] Corvaja, P. and Zannier, U. (2003). Applications of the subspace theorem. In *Diophantine Approximation*, pages 65–91. Springer.
- [Danicic, 1957] Danicic, I. (1957). An elementary proof of minkowski's second inequality. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53:412–415.
- [Davenport and Schmidt, 1967] Davenport, H. and Schmidt, W. (1967). Approximation to real numbers by quadratic irrationals. *Acta Arithmetica*, 13(2):169–176.
- [de Saxcé, 2024] de Saxcé, N. (2024). Sous-espaces, angles et approximation diophantienne. *Journal of the European Mathematical Society*.
- [Derksen, 2007] Derksen, H. (2007). A skolem–mahler–lech theorem in positive characteristic. *Inventiones Mathematicae*, 168(1):175–224.
- [Goel et al., 2025] Goel, S., Lunia, R., and Ray, A. (2025). Diophantine approximation and the subspace theorem.
- [Haas, 1986] Haas, A. (1986). The geometry of markoff forms. *The Mathematical Intelligencer*, 8(3):20–25.
- [Haas and Susskind, 1998] Haas, A. and Susskind, P. (1998). The markov spectrum and hyperbolic geometry. *Journal of Number Theory*, 73(1):1–24.
- [Henk, 1993] Henk, M. (1993). Successive minima and lattice points. In Gruber, P. M. and Wills, J. M., editors, *Handbook of Convex Geometry*, pages 109–149. North-Holland.
- [Lin, 2017] Lin, X. (2017). Continued fraction expansions of algebraic numbers.
- [Roy, 2011] Roy, D. (2011). Markoff–lagrange spectrum and extremal numbers. *Acta Mathematica*, 206(2):325 – 362.
- [Schlickewei et al., 2008] Schlickewei, H. P., Schmidt, W. M., and Tichy, R. F., editors (2008). *Diophantine Approximation*. Developments in Mathematics. Springer.
- [Schmidt, 1967] Schmidt, W. M. (1967). *Diophantine Approximation and Diophantine Equations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer.
- [Schmidt, 1980] Schmidt, W. M. (1980). *Diophantine Approximation*, volume 785 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer.

- [Series, 1985] Series, C. (1985). The modular surface and continued fractions. *Journal of the London Mathematical Society*, 31(1):69–80.
- [Series, 1986] Series, C. (1986). The geometry of markoff numbers. *The Mathematical Intelligencer*, 7(3):20–29.
- [Sheingorn, 1985] Sheingorn, M. (1985). Characterization of simple closed geodesics on fricke surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 52(2):535–545.
- [Sheingorn, 1995] Sheingorn, M. (1995). Geodesics, continued fractions, and diophantine approximation. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 25(3):1159–1181.