



# **Courbes dans les Surfaces**

**Topologie Arithmétique et Dynamique Algébrique**

**Christopher-Lloyd Simon**

**Institut de Mathématique de Rennes  
Équipe de Théorie Ergodique**

# Plan

- 1 Présentation
- 2 Théorie de Fourier des pseudocaractères de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Projets

# Parcours et Insertion dans la communauté Mathématique

## Doctorat à Lille puis Postdoctorats en Pennsylvanie et à Rennes

2019–2022 Doctorat à l'Université de Lille avec É. Ghys et P. Popescu-Pampu.

2022–2025 S. Chowla Research Assistant Professor à Penn State University

## Invitations et participations aux séminaires, écoles, conférences

2017– 35 exposés séminaires, colloquium, minicours (BANF, Simons Semester)

2018– 20 écoles conférences (dont referee des comptes rendus CANT 2025)

## Organisation scientifique & Activité éditoriale

2017– Organisation 4 conférences ; IRMAR Théorie Ergodique & GdT AD

2017– Rapporteur journaux GATD, Éditeur et traducteur (JMENSL et AMR)

## Enseignement de L1 au M2 & Encadrement de projets étudiants

2016–2025 Colles en Prépa MP\* ; TD de L1 à M2 ; Cours avancés L3 (PSU)

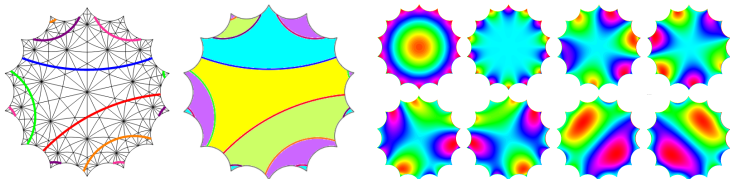
2024–2026 Encadré 2 projets d'étudiants (menant à des prépublications)

# Recherche : Topologie $\leftrightarrow$ Représentations $\leftrightarrow$ Arithmétique

Thèmes : Structures et symétries des courbes dans les surfaces

Structures : Topologiques, Arithmétiques, Combinatoires, Algébriques

Symétries : Action des groupes modulaires par monodromie



Projet : Théorie des représentations des  $\pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$  et  $\text{Mod}(\mathbf{F}_{g,n,s})$

méthodes : topologie, géométrie des groupes, géométrie algébrique

applications : arithmétique formes modulaires, dynamique fractions continuées

# Courbes dans les surfaces : combinatoire et complexité

## Topologie et combinatoire des courbes algébriques réelles (2017–2018)

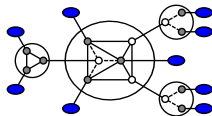
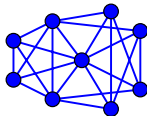
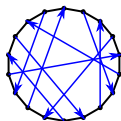
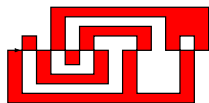
Eclatements de singularités, invariants combinatoires (É. Ghys)

Structure et dénombrement d'invariants locaux et globaux (seul)

## Diagrammes de cordes et graphes d'entrelacement (2023–2026)

Invariants homologiques, Opérateur, Grammaire génératrice (seul)

Complémentations locales et Polynômes d'entrelacement (M. Yadav)



## Complexité des multicourbes dans les surfaces (2023–2026)

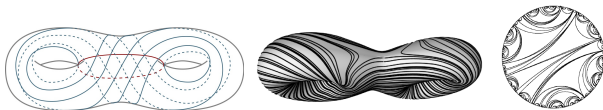
Le treillis d'épinglement des multicourbes (B. Stucky)

Complexité d'épinglement multi-courbesimples (E. Seo, B. Stucky)

# Variétés de représentations : algèbre et géométrie

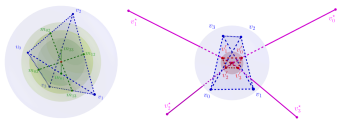
## Algèbre des variétés de caractères $X(\pi_1(\mathbf{F}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ (2019–2020)

- Compactification par valuations ; Automorphismes (J. Marché)
- Polytopes de Newton et crochet de Poisson résiduel (J. Marché)



## Rigidité des actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}, \nu)$ et $\mathrm{Aut}(T_k)$ sur $\mathbf{H}^\infty$ (2025–2026)

- Simplexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$  maximisant le rayon inscrit (B. Duchesne)
- Variétés des actions sur tous les  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^k$  (B. Duchesne)



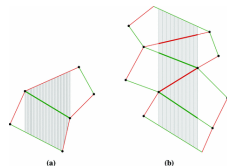
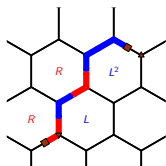
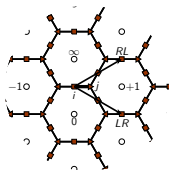
# Groupes modulaires : topologie, arithmétique et dynamique

## Arithmétique et Topologie de $PSL_2$ (2020–2023)

- Classes de conjugaison dans  $PSL(2, \mathbb{Q})$  et composition de Gauss (seul)
- Pseudocaractères d'enlacement du groupe modulaire  $PSL_2(\mathbb{Z})$  (seul)

## FraCont : arithmétique et dynamique symbolique (2023–2026)

- Périodes et limites de la fonction  $\eta$  de Dedekind (S. Schmieding)
- Isogénies des systèmes de Cantor, échanges d'intervalles (S. Schmieding)
- Transcendance des laminations dans les surfaces arithmétiques (seul)



# Plan

1 Présentation

2 Théorie de Fourier des pseudocaractères de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

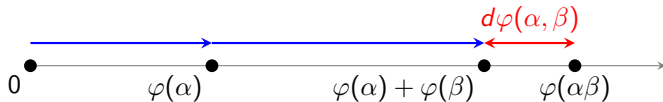
3 Projets

# L'espace des pseudocaractères $PX(\Gamma; \mathbb{R})$

**Définition :**  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  pseudocaractère

**quasicaractère** lorsque  $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(\alpha\beta) = d\varphi(\alpha, \beta)$  est **borné** sur  $\Gamma \times \Gamma$ ,

**homogène** lorsque  $\forall \gamma \in \Gamma$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\varphi(\gamma^n) = n\varphi(\gamma)$ .



$PX \implies$  invariant par conjugaison (fonction de classe)

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des pseudocaractères  $PX(\Gamma; \mathbb{R})$  :

muni d'une **semi-norme**  $\|d\varphi\|_\infty$  et  $\ker \|d\varphi\|_\infty = X(\Gamma; \mathbb{R})$  caractères,

le quotient  $PX'(\Gamma; \mathbb{R}) = PX(\Gamma; \mathbb{R})/X(\Gamma; \mathbb{R})$  est un **Banach** ! [MM85, Iva88]

mais on considère ici la **topologie convergence ponctuelle** ( $\star_c$ -faible).

# De la dimension infinie à la description d'une base

Pour de nombreux groupes  $\Gamma$ , on sait montrer  $\dim PX'(\Gamma; \mathbb{R}) = \infty$  :

Pour  $\Gamma$  Gromov-hyperbolique non-élémentaire [EF97]

Pour  $\Gamma = \text{Mod}(\mathbf{F}_{g,n})$  avec  $3g - 3 + n > 0$  [BF02, Fuj09].

[BM02] :  $PX'$  a trouvé des applications dans de nombreux domaines [...] pour des groupes discrets, il reste inaccessible aux calculs [...] tous les résultats affirment sa trivialité ou une dimension infinie ingérable.

Objectif : Pour  $\Gamma = \pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$  trouver un base de Schauder  $PX(\Gamma; \mathbb{R})$

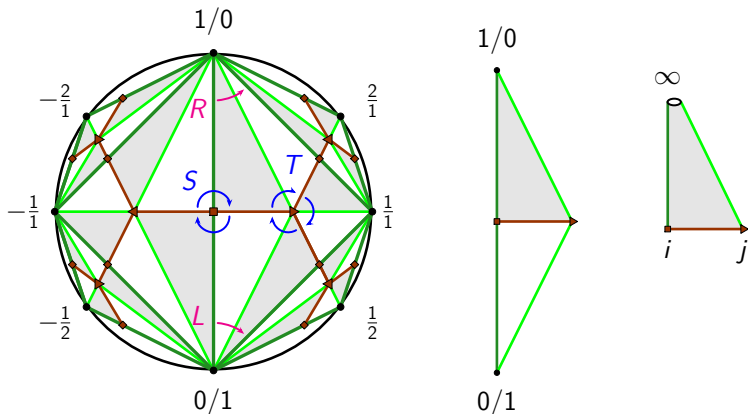
Base indexée par  $\pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$  modulo conjugaison et puissances  
(= classes homotopie de lacets primitifs de  $\mathbf{F}_{g,n,s}$ ).

[Gri95] construit la seule base connue, de nature combinatoire, reposant sur les quasicharactères de Brooks  $\text{mas}_w(\gamma) = \text{occ}_w(\gamma) - \text{occ}_{w-1}(\gamma)$ .

[Sim25] découvre une base de nature topologique via les nombres d'enlacement entre nœuds modulaires :  $C_\alpha(\beta) = \text{lk}(\alpha, \beta) - \text{lk}(\alpha, \beta^{-1})$ .

# Action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbf{HP}$

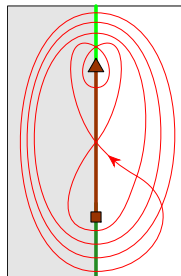
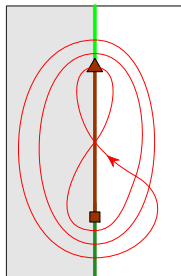
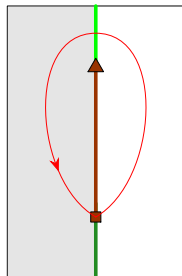
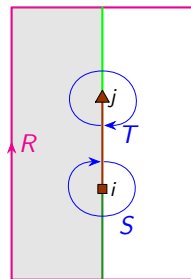
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



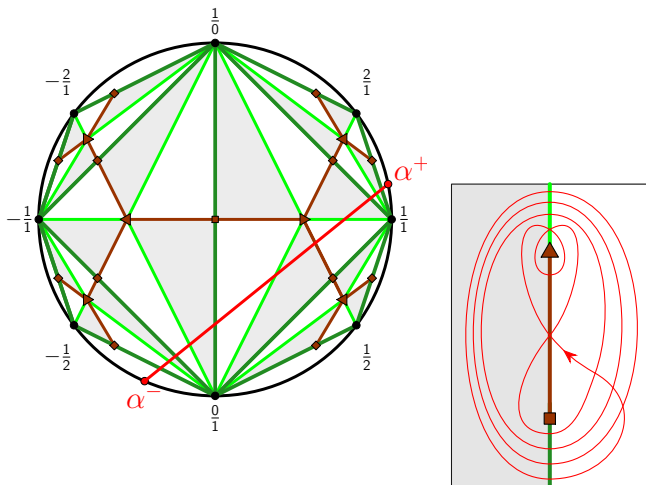
Pavage de  $\mathbf{HP}$  sous l'action du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ , un domaine fondamental, l'orbifold modulaire  $\mathbf{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{HP}$ .

# Lacets de l'orbifold modulaire $\mathbf{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{HP}$

Classes d'homotopie libre de lacets orientés dans $\mathbf{M}$	Classes de conjugaison dans $\pi_1(\mathbf{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
$\exists!$ représentant géodésique [ $\alpha$ ] de longueur $\lambda_A$	Hyperbolique : $\mathrm{disc}(A) = \left(2 \sinh \frac{\lambda_A}{2}\right)^2$



# Géodésiques modulaires = projections d'axes hyperboliques

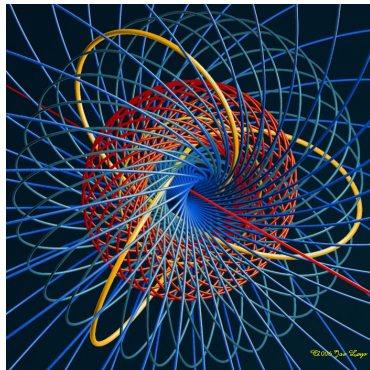


L'axe  $\alpha \subset \mathbf{HP}$  de  $A = RLLL \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  joint  $\alpha^- = -1/[\overline{3}, 1]$  &  $\alpha^+ = [\overline{1}, 3] \in \mathbb{R}P^1$ .  
Flot géodésique  $\iff$  Dynamique symbolique  $\iff$  Fractions continues

# Fibré tangent unitaire $\mathbf{U}$ de l'orbifold modulaire $\mathbf{M}$

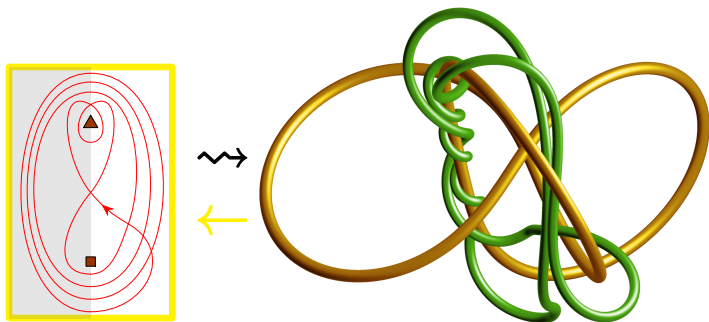
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbf{U} \\ \downarrow \mathrm{s}^1 & & \downarrow \mathrm{s}^1 \\ \mathrm{HP} & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbf{M} \end{array}$$

La fibration de Seifert  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{M}$   
révèle que  $\mathbf{U} \simeq \mathbf{S}^3 \setminus \text{trèfle}(2, 3)$ .



# Relever les géodésiques modulaires aux nœuds modulaires

Classes hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	Géodésiques modulaires dans $\mathbf{M}$	Orbites périodiques dans $\mathbf{U}$
--	---	--



La géodésique modulaire primitive  $[\alpha]$  se relève en le nœud modulaire  $\vec{\alpha}$

# Enlacement avec trèfle = pseudocaractère de Rademacher

## Théorèmes [BG92, Ghy07]

Pour  $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperbolique :  $\mathrm{lk}(\text{trèfle}, \vec{\alpha}) = \mathrm{Rad}(A)$ .

La fonction  $\mathrm{Rad}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est un **pseudocaractère**

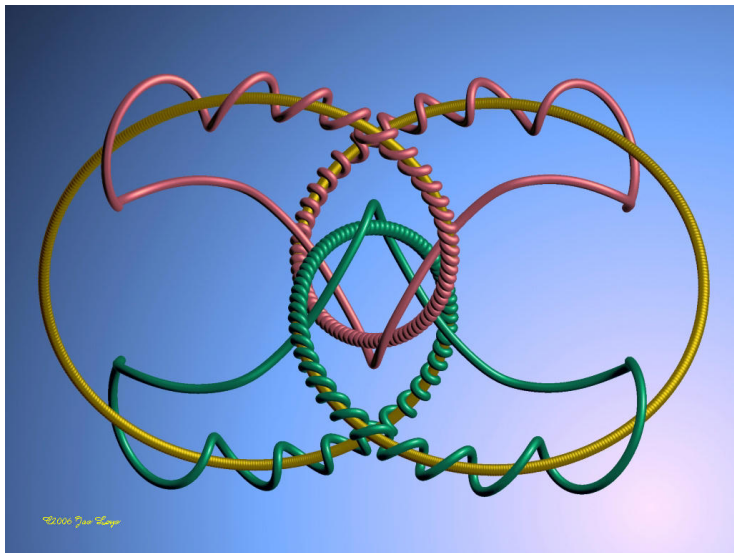
## Théorème “omnibus” [Ati87]. L'invariant $\mathrm{Rad}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est

- 2 Défaut de **signature du fibré en tore**  $T_A$  de monodromie  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .
- 3 **Cocycle pour la série d'Eisenstein**  $E_2$  (ou  $\log \eta$  de Dedekind).
- 5 Valeur spéciale en 0 de la **L-fonction de Shimizu**  $L_A(s) = \sum \frac{\mathrm{sign} Q_A(m,n)}{|Q_A(m,n)|^s}$ .

(5.60) **Theorem.** *Let  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  be hyperbolic. Then the following invariants of  $A$  coincide.*

- 1) Meyer's signature invariant  $\phi(A)$  (see (5.3)).
- 2) Hirzebruch's signature defect  $\delta(A)$ .
- 3) The invariant  $\chi(A)$  describing the transformation properties of  $\log \eta(\tau)$  under  $A$  (see (5.22)).
- 4)  $\mu(A)$  the logarithmic monodromy (divided by  $\pi i$ ) of Quillen's determinant line-bundle  $\mathcal{L}$ .
- 5) The value  $L_A(0)$  of the Shimizu L-function (see (5.49)).
- 6) The Atiyah-Patodi-Singer invariant  $\eta(A)$ .
- 7) The “adiabatic limit”  $\eta^0(A)$ .

Qu'en est-il de l'enlacement des nœuds modulaires ?



## Base de Schauder de $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$ : les cosignus $C_A$

**Définition [Sim25, 7.6]** : fonction cosignus = enlacement antisymétrisé

Pour  $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , définis  $C_A: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  par  $C_A(B) = \mathrm{lk}(A, B) - \mathrm{lk}(A^{-1}, B)$ .

**Définition** : classes de conjugaison modulo puissances

Partition  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_- \sqcup \mathcal{P}_+$  en deux sous-ensembles bijectés par l'inversion.

$\mathcal{P}_+$  = classes d'homotopie de courbes primitives "chirales".

**Théorème [Sim25]** : base de Schauder de  $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$

La famille des  $C_A \in PX(\Gamma; \mathbb{R})$  pour  $A \in \mathcal{P}_+$  est une base de Schauder :

$$\forall f \in PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R}), \quad \exists! (c_A(f))_A \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_+}, \quad f = \sum_A c_A(f) \cdot C_A$$

Les coefficients de période  $c_A: f \mapsto c_A(f)$  sont continus ( $\star_c$ -faible)

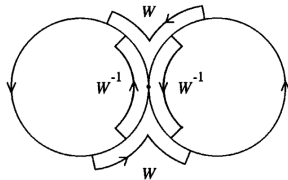
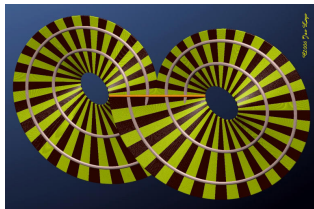
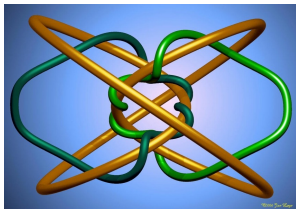
**Conclusion** : Théorie de Fourier des pseudocaractères de  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

# Preuve :

Lemme [Sim25, 7.6] : décompose  $C_A$  dans la base des  $(\text{mas}_w)$

$$C_A(B) = \text{lk}(A, B) - \text{lk}(A, B^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_w \begin{pmatrix} \text{occ}_{RwL}(A) \cdot \text{mas}_{LwR}(B) \\ + \\ \text{occ}_{LwR}(A) \cdot \text{mas}_{RwL}(B) \end{pmatrix}$$

la somme sur les mots  $w \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$  avec  $\text{len}(w) < \max\{\text{len } A, \text{len } B\}$ .



topologie  $\rightsquigarrow$  géométrie variété des caractères  $\rightsquigarrow$  dynamique symbolique  $\rightsquigarrow$  combinatoire

# Plan

1 Présentation

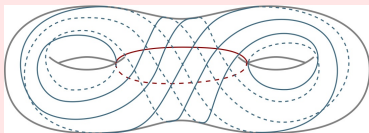
2 Théorie de Fourier des pseudocaractères de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

3 Projets

# Projets : toutes les surfaces, formes de Gauss et courants

En cours : Base de Schauder de cosinus  $C_A$  pour  $PX(\pi_1(\mathbf{F}_g))$

Grigorchuk [Gri95] a construit une base combinatoire de Brooks ( $\text{mas}_P$ ).



Forme de Gauss, puis extension aux courants géodésiques :

Pour  $(\alpha, \beta) : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$  on a  $\text{lk}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\det(\dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(t), \alpha(s) - \beta(t))}{|\alpha(s) - \beta(t)|^3}$ .

Gauss :

$$\iint \frac{(x'-x)(dydz' - dzdy') + (y'-y)(dzdx' - dx dz') + (z'-z)(dxdy' - dydx')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = \mathcal{V}$$

DeTurck–Gluck [DG08] : Formes de Gauss Isom-invariantes sur  $\mathbf{S}^3$  et  $\mathbf{H}^3$ .

Projet en cours : Forme de Gauss naturelle pour nœuds Legendriens dans le fibré tangent unitaire d'une surface (Géométries  $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^2$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ,  $\widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{R})}$ ).

# Projets : liens avec les formes modulaires

Remarque : L'intersection est la symétrisation de l'enlacement

Pour  $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperboliques :  $lk(A, B) + lk(A^{-1}, B) = \frac{1}{2} i(A, B)$ .

Question : cosignus via les cocycles associés aux formes modulaires ?

[DIT17] construisent une fonction modulaire dont le symbole retrouve  $i(A, \cdot)$ .

Projet : cosignus via les produits scalaires de Weil–Peterssen ?

$A \in \Gamma$  hyperbolique,  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , série de Poincaré  $\Theta_A^k \in \mathcal{M}_0^{2k}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$  :

$$\Theta_A^k(z) = \sum_{\gamma \in \langle A \rangle \backslash \Gamma} \left( \frac{\gamma'(z)}{Q_A(\gamma z)} \right)^k \quad (\iff) \quad \langle \Theta_A^{k+1} | \Phi \rangle = \int_{\bar{\alpha}} \Phi.$$

Pour  $A, B \in \Gamma$  hyperboliques, [Kat85, KM87] exprime  $\Im(\langle \Theta_A^{k+1} | \Theta_B^{k+1} \rangle)$  en terme de leur  $k$ -ième nombre d'intersection symplectique :

$$W_k(A, B) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \mathrm{sign}(\theta_p) \times \mathrm{Leg}_k(\cos \theta_p)$$

# Bibliography I



Michael Atiyah.

The logarithm of the Dedekind  $\eta$ -function.

*Math. Ann.*, 278(1-4) :335–380, 1987.



Mladen Bestvina and Koji Fujiwara.

Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups.

*Geom. Topol.*, 6 :69–89, 2002.



J. Barge and É. Ghys.

Cocycles d'Euler et de Maslov.

*Math. Ann.*, 294(2) :235–265, 1992.



Marc Burger and Nicolas Monod.

On and around the bounded cohomology of  $SL_2$ .

In *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, pages 19–37. Springer, Berlin, 2002.

# Bibliography II



Dennis DeTurck and Herman Gluck.

Electrodynamics and the Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space.

*J. Math. Phys.*, 49(2) :023504, 35, 2008.



W. Duke, Ö. Imamoğlu, and Á. Tóth.

Modular cocycles and linking numbers.

*Duke Math. J.*, 166(6) :1179–1210, 2017.



David B. A. Epstein and Koji Fujiwara.

The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups.

*Topology*, 36(6) :1275–1289, 1997.



Koji Fujiwara.

Quasi-homomorphisms on mapping class groups.

In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 241–269. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

# Bibliography III



Étienne Ghys.

Knots and dynamics.

*In International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 247–277. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.



R. I. Grigorchuk.

Some results on bounded cohomology.

*In Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993)*, volume 204 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 111–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.



N. V. Ivanov.

The second bounded cohomology group.

*Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 167(Issled. Topol. 6) :117–120, 191, 1988.



Svetlana Katok.

Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms.

*Invent. Math.*, 80(3) :469–480, 1985.

# Bibliography IV



Svetlana Katok and John J. Millson.

Eichler-Shimura homology, intersection numbers and rational structures on spaces of modular forms.

*Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(2) :737–757, 1987.



Shigenori Matsumoto and Shigeyuki Morita.

Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms.

*Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(3) :539–544, 1985.



Christopher-Lloyd Simon.

Linking numbers of modular knots.

*Geometry and Topology*, 29(6) :3241–3270, 2025.