



Courbes dans les Surfaces

Topologie Arithmétique et Dynamique Algébrique

Christopher-Lloyd Simon

**Institut de Mathématique de Rennes
Équipe de Théorie Ergodique**

Plan

- 1 Présentation
- 2 Théorie de Fourier des pseudocaractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Intégration du profil et projet dans une UMR du CNRS

Parcours et Insertion dans la communauté Mathématique

Doctorat à Lille puis Postdoctorats en Pennsylvanie et à Rennes

2019–2022 Doctorat à l'Université de Lille avec É. Ghys et P. Popescu-Pampu.

2022–2025 S. Chowla Research Assistant Professor à Penn State University

Invitations et participations aux séminaires, écoles, conférences

2017– 35 exposés séminaires, colloquium, minicours (BANF, Simons Semester)

2018– 20 écoles conférences (dont referee des comptes rendus CANT 2025)

Organisation scientifique & Activité éditoriale

2017– Organisation 4 conférences ; IRMAR Théorie Ergodique & GdT AD

2017– Rapporteur journaux GATD, Éditeur et traducteur (JMENSL et AMR)

Enseignement de L1 au M2 & Encadrement de projets étudiants

2016–2025 Colles en Prépa MP* ; TD de L1 à M2 ; Cours avancés L3 (PSU)

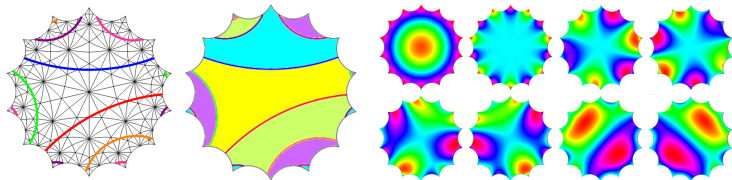
2024–2026 Encadré 2 projets d'étudiants (menant à des prépublications)

Recherche : Topologie \rightsquigarrow Approximation Diophantienne

Thèmes : Structures et symétries des courbes dans les surfaces

Structures : Topologiques, Arithmétiques, Combinatoires, Algébriques

Symétries : Action des groupes modulaires par monodromie



Projet : Théorie des représentations des $\pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$ et $\text{Mod}(\mathbf{F}_{g,n,s})$

méthodes : topologie, géométrie des groupes, géométrie algébrique

applications : arithmétique formes modulaires, dynamique fractions continuées

Travaux et collaborations en lien avec le projet

Algèbre des variétés de caractères $X(\pi_1(\mathbf{F}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ (2019–2020)

- Compactification par valuations ; Automorphismes (J. Marché)
- Polytopes de Newton et crochet de Poisson résiduel (J. Marché)

Arithmétique et Topologie de PSL_2 (2020–2023)

- Classes de conjugaison dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Q})$ et composition de Gauss (seul)
- Pseudocaractères d'enlacement du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (seul)

FraCont : arithmétique et dynamique symbolique (2023–2025)

- Périodes et limites de la fonction η de Dedekind (S. Schmieding)
- Isogénies des systèmes de Cantor, échanges d'intervalles (S. Schmieding)

Rigidité des actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}, \nu)$ et $\mathrm{Aut}(T_k)$ sur \mathbf{H}^∞ (2025–2026)

- Simplexes de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ maximisant le rayon inscrit (B. Duchesne)
- Variétés des actions sur tous les $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$ (B. Duchesne)

Plan

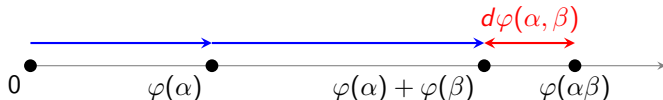
- 1 Présentation
- 2 Théorie de Fourier des pseudocaractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Intégration du profil et projet dans une UMR du CNRS

L'espace des pseudocaractères $PX(\Gamma; \mathbb{R})$

Définition : $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ pseudocaractère

quasicaractère lorsque $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(\alpha\beta) = d\varphi(\alpha, \beta)$ est **borné** sur $\Gamma \times \Gamma$,

homogène lorsque $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(\gamma^n) = n\varphi(\gamma)$.



$PX \implies$ invariant par conjugaison (fonction de classe)

Le \mathbb{R} -espace vectoriel des pseudocaractères $PX(\Gamma; \mathbb{R})$:

muni d'une **semi-norme** $\|d\varphi\|_\infty$ et $\ker \|d\varphi\|_\infty = X(\Gamma; \mathbb{R})$ caractères,

le quotient $PX'(\Gamma; \mathbb{R}) = PX(\Gamma; \mathbb{R})/X(\Gamma; \mathbb{R})$ est un **Banach** ! [MM85, Iva88]

mais on considère ici la **topologie convergence ponctuelle** (\star_c -faible).

De la dimension infinie à la description d'une base

Pour de nombreux groupes Γ , on sait montrer $\dim PX'(\Gamma; \mathbb{R}) = \infty$:

Pour Γ Gromov-hyperbolique non-élémentaire [EF97]

Pour $\Gamma = \text{Mod}(\mathbf{F}_{g,n})$ avec $3g - 3 + n > 0$ [BF02, Fuj09].

[BM02] : PX' a trouvé des applications dans de nombreux domaines [...] pour des groupes discrets, il reste inaccessible aux calculs [...] tous les résultats affirment sa trivialité ou une dimension infinie ingérable.

Objectif : Pour $\Gamma = \pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$ trouver un base de Schauder $PX(\Gamma; \mathbb{R})$

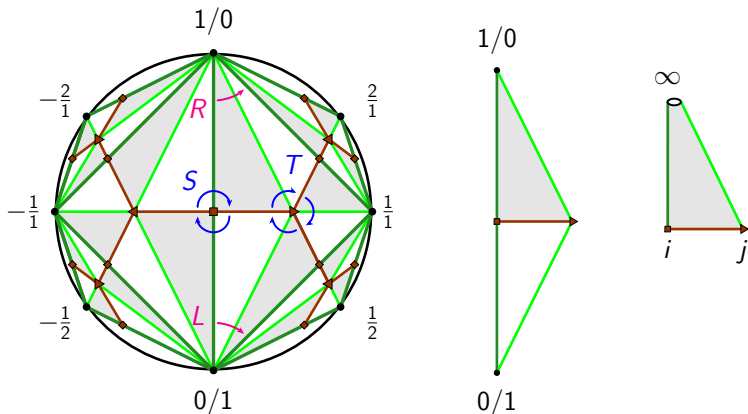
Base indexée par $\pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$ modulo conjugaison et puissances
(= classes homotopie de lacets primitifs de $\mathbf{F}_{g,n,s}$).

[Gri95] construit la seule base connue, de nature combinatoire, reposant sur les quasicharactères de Brooks $\text{mas}_w(\gamma) = \text{occ}_w(\gamma) - \text{occ}_{w-1}(\gamma)$.

[Sim25] découvre une base de nature topologique via les nombres d'enlacement entre nœuds modulaires : $C_\alpha(\beta) = \text{lk}(\alpha, \beta) - \text{lk}(\alpha, \beta^{-1})$.

Action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbf{HP}

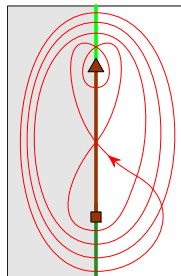
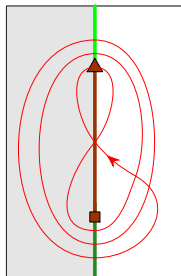
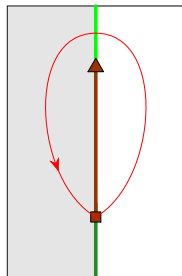
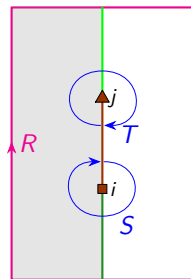
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



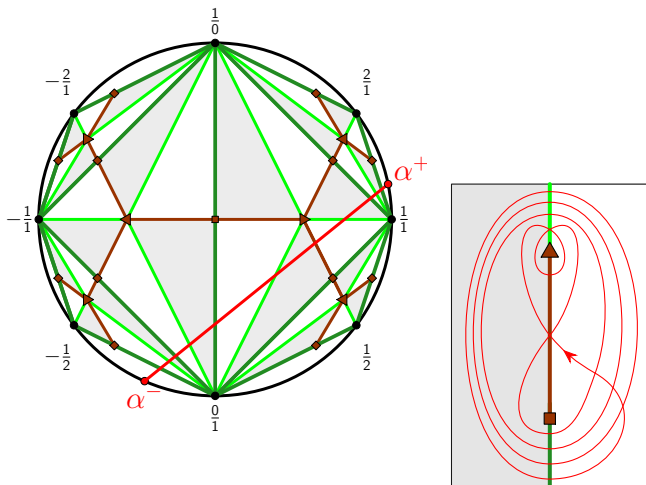
Pavage de \mathbf{HP} sous l'action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$, un domaine fondamental, l'orbifold modulaire $\mathbf{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{HP}$.

Lacets de l'orbifold modulaire $\mathbf{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{HP}$

Classes d'homotopie libre de lacets orientés dans \mathbf{M}	Classes de conjugaison dans $\pi_1(\mathbf{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
$\exists!$ représentant géodésique [α] de longueur λ_A	Hyperbolique : $\mathrm{disc}(A) = \left(2 \sinh \frac{\lambda_A}{2}\right)^2$



Géodésiques modulaires = projections d'axes hyperboliques

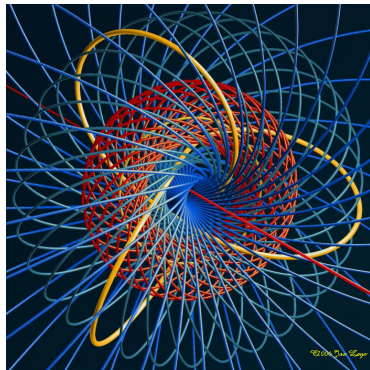


L'axe $\alpha \subset \mathbf{HP}$ de $A = RLLL \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ joint $\alpha^- = -1/[\overline{3,1}]$ & $\alpha^+ = [\overline{1,3}] \in \mathbb{R}P^1$.
Flot géodésique \iff Dynamique symbolique \iff Fractions continues

Fibré tangent unitaire \mathbf{U} de l'orbifold modulaire \mathbf{M}

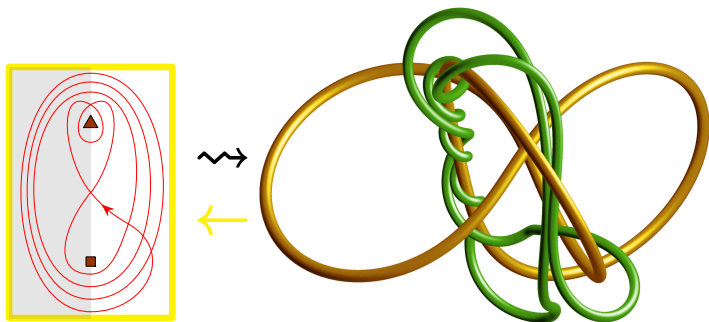
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbf{U} \\ \downarrow \mathrm{s}^1 & & \downarrow \mathrm{s}^1 \\ \mathrm{HP} & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbf{M} \end{array}$$

La fibration de Seifert $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{M}$
révèle que $\mathbf{U} \simeq \mathbf{S}^3 \setminus \text{trèfle}(2, 3)$.



Relever les géodésiques modulaires aux nœuds modulaires

Classes hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	Géodésiques modulaires dans \mathbf{M}	Orbites périodiques dans \mathbf{U}
--	---	--



La géodésique modulaire primitive $[\alpha]$ se relève en le nœud modulaire $\vec{\alpha}$

Enlacement avec trèfle = pseudocaractère de Rademacher

Théorèmes [BG92, Ghy07]

Pour $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique : $\mathrm{lk}(\text{trèfle}, \vec{\alpha}) = \mathrm{Rad}(A)$.

La fonction $\mathrm{Rad}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un **pseudocaractère**

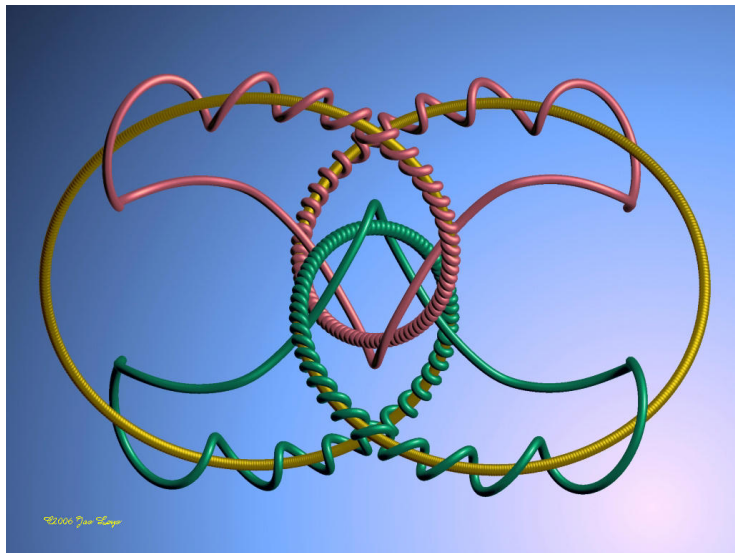
Théorème “omnibus” [Ati87]. L'invariant $\mathrm{Rad}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est

- 2 Défaut de **signature du fibré en tore** T_A de monodromie $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- 3 **Cocycle pour la série d'Eisenstein** E_2 (ou $\log \eta$ de Dedekind).
- 5 Valeur spéciale en 0 de la **L-fonction de Shimizu** $L_A(s) = \sum \frac{\mathrm{sign} Q_A(m,n)}{|Q_A(m,n)|^s}$.

(5.60) **Theorem.** *Let $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ be hyperbolic. Then the following invariants of A coincide.*

- 1) Meyer's signature invariant $\phi(A)$ (see (5.3)).
- 2) Hirzebruch's signature defect $\delta(A)$.
- 3) The invariant $\chi(A)$ describing the transformation properties of $\log \eta(\tau)$ under A (see (5.22)).
- 4) $\mu(A)$ the logarithmic monodromy (divided by πi) of Quillen's determinant line-bundle \mathcal{L} .
- 5) The value $L_A(0)$ of the Shimizu L-function (see (5.49)).
- 6) The Atiyah-Patodi-Singer invariant $\eta(A)$.
- 7) The “adiabatic limit” $\eta^0(A)$.

Qu'en est-il de l'enlacement des nœuds modulaires ?



Base de Schauder de $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$: les cosignus C_A

Définition [Sim25, 7.6] : fonction cosignus = enlacement antisymétrisé

Pour $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, définis $C_A: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ par $C_A(B) = \mathrm{lk}(A, B) - \mathrm{lk}(A^{-1}, B)$.

Définition : classes de conjugaison modulo puissances

Partition $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_- \sqcup \mathcal{P}_+$ en deux sous-ensembles bijectés par l'inversion.

\mathcal{P}_+ = classes d'homotopie de courbes primitives "chirales".

Théorème [Sim25] : base de Schauder de $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$

La famille des $C_A \in PX(\Gamma; \mathbb{R})$ pour $A \in \mathcal{P}_+$ est une base de Schauder :

$$\forall f \in PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R}), \quad \exists! (c_A(f))_A \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_+}, \quad f = \sum_A c_A(f) \cdot C_A$$

Les coefficients de période $c_A: f \mapsto c_A(f)$ sont continus (\star_c -faible)

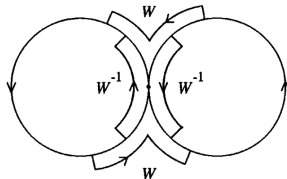
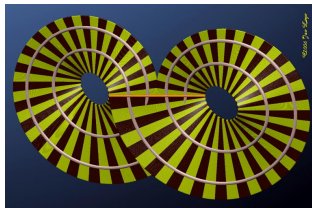
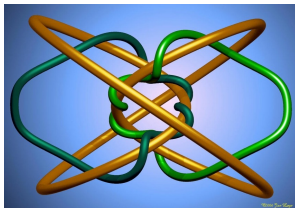
Conclusion : Théorie de Fourier des pseudocaractères de $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Preuve :

Lemme [Sim25, 7.6] : décompose C_A dans la base des (mas_w)

$$C_A(B) = \text{lk}(A, B) - \text{lk}(A, B^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_w \begin{pmatrix} \text{occ}_{RwL}(A) \cdot \text{mas}_{LwR}(B) \\ + \\ \text{occ}_{LwR}(A) \cdot \text{mas}_{RwL}(B) \end{pmatrix}$$

la somme sur les mots $w \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$ avec $\text{len}(w) < \max\{\text{len } A, \text{len } B\}$.

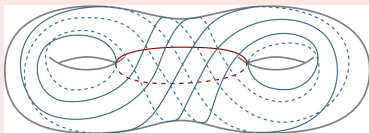


topologie \rightsquigarrow géométrie variété des caractères \rightsquigarrow dynamique symbolique \rightsquigarrow combinatoire

Projets : toutes les surfaces, formes de Gauss et courants

En cours : Base de Schauder de cosinus C_A pour $PX(\pi_1(\mathbf{F}_g))$

Grigorchuk [Gri95] a construit une base combinatoire de Brooks (mas_P).



Forme de Gauss, puis extension aux courants géodésiques :

Pour $(\alpha, \beta) : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$ on a $\text{lk}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\det(\dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(t), \alpha(s) - \beta(t))}{|\alpha(s) - \beta(t)|^3}$.

Gauss :

$$\iint \frac{(x'-x)(dydz' - dzdy') + (y'-y)(dzdx' - dx dz') + (z'-z)(dxdy' - dydx')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = \mathcal{V}$$

DeTurck–Gluck [DG08] : Formes de Gauss Isom-invariantes sur \mathbf{S}^3 et \mathbf{H}^3 .

Projet en cours : Forme de Gauss naturelle pour nœuds Legendriens dans le fibré tangent unitaire d'une surface (Géométries $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$).

Projets : liens avec les formes modulaires

Remarque : L'intersection est la symétrisation de l'enlacement

Pour $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques : $lk(A, B) + lk(A^{-1}, B) = \frac{1}{2} i(A, B)$.

Question : cosignus via les cocycles associés aux formes modulaires ?

[DIT17] construisent une fonction modulaire dont le symbole retrouve $i(A, \cdot)$.

Projet : cosignus via les produits scalaires de Weil–Peterssen ?

$A \in \Gamma$ hyperbolique, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, série de Poincaré $\Theta_A^k \in \mathcal{M}_0^{2k}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$:

$$\Theta_A^k(z) = \sum_{\gamma \in \langle A \rangle \backslash \Gamma} \left(\frac{\gamma'(z)}{Q_A(\gamma z)} \right)^k \quad (\iff) \quad \langle \Theta_A^{k+1} | \Phi \rangle = \int_{\bar{\alpha}} \Phi.$$

Pour $A, B \in \Gamma$ hyperboliques, [Kat85, KM87] exprime $\mathfrak{S}(\langle \Theta_A^{k+1} | \Theta_B^{k+1} \rangle)$ en terme de leur k -ième nombre d'intersection symplectique :

$$W_k(A, B) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \mathrm{sign}(\theta_p) \times \mathrm{Leg}_k(\cos \theta_p)$$

Plan

- 1 Présentation
- 2 Théorie de Fourier des pseudocaractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Intégration du profil et projet dans une UMR du CNRS

Affectation 01/04 : AGM à Cergy (UMR 8088)

Rendez-vous avec Christophe Prange :

- jeune laboratoire actif et indépendant de Paris, mais assez proche pour séminaires et collaborations ;
- encourage et soutient les projets des jeunes chercheurs : une opportunité pour développer un programme et une école (minicours thématiques, faire venir des invitées, élèves, ...).

Des interactions fructueuses avec :

Bertrand Deroin (DR) ; dynamique et géométrie complexe

Giovanni Forni (PU) ; dynamique des surfaces de translation, renormalisation

Jules Martel (MC) ; topologie des nœuds, tresses, groupes modulaires

Aurélien Galateau (MC) ; approximation diophantienne, valuations sur les variétés de caractères

Téo Banica (PU), Ruslan Maximau (MC), Louis Loos (MC) ; physique quantique, théorie des représentations, algèbres planaires

Bibliography I



Michael Atiyah.

The logarithm of the Dedekind η -function.

Math. Ann., 278(1-4) :335–380, 1987.



Mladen Bestvina and Koji Fujiwara.

Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups.

Geom. Topol., 6 :69–89, 2002.



J. Barge and É. Ghys.

Cocycles d'Euler et de Maslov.

Math. Ann., 294(2) :235–265, 1992.



Marc Burger and Nicolas Monod.

On and around the bounded cohomology of SL_2 .

In *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, pages 19–37. Springer, Berlin, 2002.

Bibliography II



Dennis DeTurck and Herman Gluck.

Electrodynamics and the Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space.

J. Math. Phys., 49(2) :023504, 35, 2008.



W. Duke, Ö. Imamoğlu, and Á. Tóth.

Modular cocycles and linking numbers.

Duke Math. J., 166(6) :1179–1210, 2017.



David B. A. Epstein and Koji Fujiwara.

The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups.

Topology, 36(6) :1275–1289, 1997.



Koji Fujiwara.

Quasi-homomorphisms on mapping class groups.

In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 241–269. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

Bibliography III



Étienne Ghys.

Knots and dynamics.

In International Congress of Mathematicians. Vol. I, pages 247–277. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.



R. I. Grigorchuk.

Some results on bounded cohomology.

In Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993), volume 204 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 111–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.



N. V. Ivanov.

The second bounded cohomology group.

Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 167(Issled. Topol. 6) :117–120, 191, 1988.



Svetlana Katok.

Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms.

Invent. Math., 80(3) :469–480, 1985.

Bibliography IV



Svetlana Katok and John J. Millson.

Eichler-Shimura homology, intersection numbers and rational structures on spaces of modular forms.

Trans. Amer. Math. Soc., 300(2) :737–757, 1987.



Shigenori Matsumoto and Shigeyuki Morita.

Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms.

Proc. Amer. Math. Soc., 94(3) :539–544, 1985.



Christopher-Lloyd Simon.

Linking numbers of modular knots.

Geometry and Topology, 29(6) :3241–3270, 2025.