Notes en Géométrie Algébrique

Christopher-Lloyd Simon

1 Hilbert et la théorie des invariants

1.1 Physique et mathématique: des approches similaires

En physique, on doit souvent étudier un système au travers d'un certain nombre de mesures qu'on peut lui appliquer. On a alors un modèle pour l'objet, mais on le ne connait alors l'objet qu'à une certaine symétrie (de jauge) près qui préserve les mesures. Par exemple en physique quantique l'espace sous jacent est un espace de Hilbert dont les points (qui représentent les fonctions d'ondes des particules) sont des fonctions à valeurs complexes définies sur l'espace temps de Minkowski. Nous faisons semblant d'avoir accès à certaines mesures sur cet espace, nottament des opérateurs unitaires. Le groupe de symétrie de jauge quantifie le défaut entre les points du modèle abstrait et ce que nous pouvons en dire via les mesures, autrement dit ce que nous voyons, ce sont les orbites sous le groupe de jauge. En physique statistique nous avons acces aux configurations macroscopiques d'un systeme correspondant à un certain nombres de mesures, mais il y a des transformations qui préservent ces paramètres.

La pluspart des domaines mathématiques ont aussi pour but d'étudier des objets d'un espace ayant une certaine structure, selon certains critères que l'on peut obtenir par un arsenal de mesures. On peut alors definir un groupe de symétries formé par les transformations qui préservent la structure de l'espace et qui conservent les valeurs des mesures. Nous n'avons alors accès qu'au quotient de l'espace des formes etudiées sur notre structure par l'action du groupe. Nos mesures sont donc des fonctions sur cet espace quotient.

Remarque (déraisonnable efficacité des maths)**.** *Il y a là peut être une explication dans la déraisonnable efficacité des maths à la physique: les approches sont les mêmes, dans les deux cas nous sommes armés d'un certains nombre d'outils capables de quantifier des choses sur un espace, et nous tentons de décrire au mieux ce que nous pouvons percevoir de notre environnement. Les symétries de l'espace préservant nos mesures rendent inaccessible la distinction entre certains points, qui demandent d'avantage d'outils pour les discerner. La différence entre les maths et la physique c'est que la réalité physique est bien trop compliquée à priori, du moins la structure sous jacente est incertaine, et on essaye de l'étudier via les modèles mathématiques qui s'en rapprochent le plus.*

En maths les modèles sont abstraits, fixés une bonne fois pour toute, et plus simples de manière à ce qu'on puisse espérer appuyér les raisonnements par des axiomes admis comme vrais pour notre modèle. La logique est alors l'étude des axiomes qui sont raisonnables et des ce qu'on peut en tirer. Mais elle n'est ni à la seule l'origine des mathématiques ni son seul point d'appuy pour aller de l'avant.

On dit parfois qu'on part de la logique et de ses axiomes pour dérouler le tapis mais c'est faux, le chemin se fait dans les deux sens. ET même on procède rarement par déduction à l'aveugle, on utilise le plus souvent des shcémas inductifs.

Les espaces que l'on considère en mathématiques peuvent être munis de structures topologiques, métriques, linéaires, mesurés, algébriques, etc. Les groupes de transformations sont alors des groupes d'homéomorphismes, d'isométries, d'applications linéaires, préservant la mesure, birationelles, etc.

Remarque (Galoisienne)**.** *Certaines questions posées au sein d'un espace n'ont pas de réponse dans l'espace mais on peut parfois en considérer des extensions compatibles avec les structures pour y trouver (ou y ajouter) ces solutions. Afin de déterminer l'ambiguité due à la diversité des réponses possibles* *dans l'extension, on est amené à introduire le groupe des transformations de l'extension qui se restreingnent à l'identité sur la base. C'est l'approche des théories Galoisiennes.*

Exemple. *La géométrie euclidienne étudie des formes de l'espace, comme des triangles dans le plan, selon les critères métriques qui découlent du produit scalaire: angles, distances, aires. Dans le cadre linéaire (par opposition au cadre affine) un invariant apparait dès que l'on considère un point: sa norme au carré. Dans le contexte affine il faut considérer deux points.*

Les objets géométriques sont considérés à transformations euclidienne près (isométrie) c'est à dire les transformations qui préservent la structure linéaire sous jacente, ainsi que le produit scalaire.

Si on suppose que les objets sont des constructions faites sur un certain nombre finis de points (par exemple trois points forment un triangle), alors il suffit d'un seul invariant algébrique pour engendrer tous les autres, à savoir le produit scalaire (ou la norme au carré). En effet, deux familles de vecteurs (x_i) *et* (y_j) *sont dans la même orbite pour le groupe orthogonal si, et seulement si elles ont les mêmes matrices de Gram pour le produit scalaire:* $(< x_i \mid x_j >)_{i,j}$ *(a permutations des éléments près, c'est à dire que leurs matrices de Gram sont conjuguées par une matrice de permutation). Par conséquent, en définissant le groupe orthogonal comme celui qui préserve le produit scalaire, on voit que le produit scalaire est en fait "le seul" invariant algébrique qu'il préserve. Les détails de cet exemple deviendront clair par la suite.*

Souvent le problème est renversé, c'est à dire qu'au lieu de définir le groupe de symétries G, comme le sous groupe des automorphismes de l'espace V qui préservent un ensemble d'invariants, on dispose au préalable du groupe qui agit par transformations sur l'espace en préservant sa structure, et il s'agit de déterminer quels sont les invariants qui permettent de distinguer les orbites. Autrement dit on cherche les fonctions régulières sur l'espace quotient V/G.

Remarque (Théorème de Noether)**.** *C'est par exemple le cas dans l'axiomatisation de la physique sous l'impulsion de David Hilbert et de Emmy Noether, où l'on suppose que l'espace-temps (par exemple de Minkowski) est invariant par certains groupes de transformations (groupe des transformations relativistes de Poincaré), et on en déduit l'existence de quantités invariantes comme l'energie, le moment cinétique et le moment d'intertie.*

Avec ce point de vue renversé, les problèmes en théorie des invariants sont d'abord de trouver des invariants c'est à dire des fonctions régulières définies sur l'espace quotient V/G. Puis, il s'agit d'essayer de décrire comment engendrer tous les éléments de cette algèbre A de fonctions régulières de manière la plus économe possible (par exemple au sens du degré car souvent A est une algèbre graduée). On essaye ensuite de trouver les relations entre nos invariants afin de donner un aperçu de l'espace que l'on voit, c'est à dire de l'espace des valeurs rises par les invariants (parfois appelé un espace de modules). Cet espace de modules $W = Spec(A)$ peut avoir une structure similaire à celle de V/G et la collection des invariants nous donne un morphisme entre V/G et W. Il s'agit donc de décrire l'ecart entre ce l'invariance par le groupe (la physique) nous autoriserait à voir: V/G, et ce que l'on arrive à discerner en pratique grâce à nos invariants réguliers.

Remarque. *A priori, le mot fonction doit être pris au sens large, parfois on voudrait des invariants à valeurs dans des espaces d'apparence élaborée (diagrammes de cordes comme invariants de noeuds), mais on peut souvent se ramener à des algèbres polynomiales.*

1.2 La théorie classique de Hilbert

Afin que les invariants soient aussi explicites et calculables que possible, il est naturel de demander à ce qu'il soient algébriques, autrement dit on s'autorise à calculer des expressions polynomiales en les coordonnées de notre espace. On est alors dans le royaume de la géométrie algébrique et c'est dans ce cadre que Hilbert a initié la théorie classique des invariants.

Fixons un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, et commençons dans un contexte simple. L'espace sous jacent est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel V de dimension n, et le groupe G agit dessus par transformations linéaires: c'est un sous groupe du groupe linéaire $GL(V)$. On cherche l'ensemble des fonctions polynomiales $s \in S = \mathbb{K}[V] = k[x_1, \ldots, x_n]$ qui restent invariantes par l'action $g \cdot P = P \circ g^{-1}$. Cet ensemble d'invariants S^G est une $\mathbb{K}$-algèbre et son étude constitue la théorie de Hilbert.

Théoreme (Hilbert)**.** *Si G est fini. Alors S^G est une $\mathbb{K}$ algèbre de type finie.*

Etape 1: trouver une partie génératrice On commence par essayer de construire des éléments invariants. Une manière de procéder est de partir d'un élément $s \in S$ quelconque et de prendre la moyenne de son orbite sous G:

$$\rho(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot s$$

Cette application jouit des propriétés suivantes:

- ρ envoie S dans S^G
- ρ vaut l'identité en restriction à S^G
- ρ est k linéaire et même S^G linéaire

Autrement dit $\rho \in Hom_{S^G}(S, S^G)$, c'est ce que l'on appelle un opérateur de Reynolds pour G. C'est la seule hypothèse qui est nécessaire sur G pour faire marcher la preuve. La classe des groupes linéaires admettant un opérateur de Reynolds s'appellent réductifs (terminologie due à la théorie des représentations) et elle contient les groupes compacts. On a utilisé aussi le fait que k est de caractéristique nulle pour diviser par le cardinal de G. Il est important de moyenne pour qu'on récupère l'idendité

Désormais on va vouloir utiliser la structure graduée des algèbres S et S^G pour le degré des polynômes. Puisque S est engendré comme $\mathbb{K}$ espace vectoriel par des monomes $X^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, et que ρ est surjectif et $\mathbb{K}$ linéaire, S^G est engendré comme espace vectoriel par les $\{\rho(X^k) \mid k \in \mathbb{N}^n\}$. Pour tout polynome s homogène de degré k et pour tout $g \in G$: $(g \cdot s)(\lambda x) = s(\lambda.g(x)) = \lambda^k s(g(x))$ donc l'image par ρ d'un élément homogène, si elle n'est pas nulle, reste homogène de même degré.

On a exhibé une partie génératrice de S^G par des éléments homogènes. Jusque là, l'idée est assez naturelle: trouver une famille génératrice de S^G qui soit aussi propre que possible.

Etape 2: montrer qu'elle est finie Au lieu de montrer directement qu'on peut extraire une famille génératrice de l'algèbre S^G, l'idée de Hilbert est de procéder en deux temps, en étudiant d'abord l'idéal J de S engendré par les $\{\rho(X^k) \mid k \in \mathbb{N}^n, k \neq 0\}$. Autrement dit on considère des combinaisons linéaires de produits dont seulement un des facteurs, plutôt que deux, appartient à S^G, l'autre étant libre de parcourir S.

Remarque (Théorème de Dynkin)**.** *L'approche est rappelle celle de Dynkin pour montrer que la classe monotone engendrée par un pi-système est la σ-algèbre engendrée.*

C'est à cette occasion que se développe la théorie des anneaux Noetheriens et des modules ou algèbres sur ces anneaux.

Définition. *Un anneau R est Noetherien si tout ses idéaux J sont de type fini.*

Lemme. *Si R est Noetherien, $R[x]$ est Noetherien.*

Corollaire. *Une algèbre S de type fini sur un anneau Noetherien est un anneau Noetherien.*

Donc J est de type fini. En fait on peut extraire de $\{\rho(X^k) \mid k \in \mathbb{N}^n, k \neq 0\}$ une sous famille finie génératrice $j_1, \ldots, j_r$. On a $\mathbb{K}[j_1, \ldots, j_r] \subset S^G \subset J$. Montrons que les deux premiers sont égaux en supposant par l'absurde qu'on dispose d'un $h \in S^G \setminus \mathbb{K}[j_1, \ldots, j_r]$, que l'on suppose de degré minimal. Alors h est homogène car les composantes homogènes d'un invaraiant sont invariantes.

On peut décomposer $h = \sum h_i.j_i$ où l'on peut supposer que les h_i sont dans S de degré $\deg h - \deg j_i$ (en utilisant l'homogénéité de h et des j_i). En utilisant la S^G linéarité de l'opérateur de Reynolds, $h = \rho(h) = \sum \rho(h_i).j_i$. Or les $\rho(h_i)$ sont des invariants de degré plus petit que celui de h donc dans $\mathbb{K}[j_1, \ldots, j_r]$. On en déduit que $h \in \mathbb{K}[j_1, \ldots, j_r]$: absurde.

Théoreme (Noether)**.** *On peut choisir les générateurs de S^G de degrés plus petit que $|G|$.*

Série de Hilbert La série de Hilbert d'une $\mathbb{K}$ algèbre graduée $A = \bigoplus_d A_d$ est la série génératrice des dimensions des $\mathbb{K}$ modules A_d:

$$H(z) = \sum_d \dim_{\mathbb{K}}(A_d) z^d$$

Théoreme (Molien)**.**

$$H(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - zg)}$$

Utilité algorithmique. Signification (c'est une somme de produit... zeta, partition) et idée de la preuve (representations ?)

1.3 Invariants de courbes algébriques

Un autre problème ou apparait la théorie des invariants est celui de comprendre la géométrie des courbes algébriques définies par une équation implicite, à reparamétrages près par un certain groupe de tranformations du plan. Leurs propriétés géométriques peuvent être capturées par certaines expressions algébriques en les coefficients de l'équation.

Questions et invariants pour d'autres actions de groupes sur d'autres espaces

- Geometrie projective: le premier invariant arrive avec 4 points, le birraport. Est-ce "le seul" ? Le groupe projectif est il reductif ?
- Geometrie birationelle: étendre la théorie de Hilbert au non linéire, quels sont les invariants ? (corps de fonctions ?)
- Fonctions rationelles sur une variété algébrique invariantes par un sous groupe des automorphismes algébriques (birationels) de la variété.
- Faisceau des fonctions régulières sur un schéma invariantes par un sous groupe d'automorphismes du schéma ?

2 Hilbert Galois Noether Poincaré

Dans cette section $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ (par exemple $\overline{\mathbb{Q}}$).

Groupe de Galois de l'équation générale de degré n. Soit $\mathbb{K}(x) = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ le corps des fractions rationelles en n variables algébriquement indépendantes sur le corps $\mathbb{K}$, et considérons le polynôme $P(T) = \prod_j (T - x_j) \in \mathbb{K}(\sigma)[T]$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}(\sigma) = \mathbb{K}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ des fractions rationnelles en fonctions symétriques des x_j.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbb{K}(x)$ par permutation des variables x_j et s'identifie à un sous groupe des automorphismes $Aut(\mathbb{K}(x))$ et même, puisque les σ_j sont fixes par cette action, à un sous groupe du groupe de galois du polynôme $\mathrm{Gal}_{\mathbb{K}(\sigma)}(P) = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}(x)/\mathbb{K}(\sigma))$. Comme le groupe de galois d'un polynôme s'injecte dans le groupe symétrique de ses racines, cette inclusion est en fait une égalité. Ainsi le corps des fixes par l'action de $\mathfrak{S}_n$ est précisément $\mathbb{K}(\sigma)$.

Comme $\mathbb{K}(x)$ est entier sur l'anneau $\mathbb{K}[\sigma]$ qui est intégralement clos, on en déduit le théorème des polynômes symétriques: les polynômes dans $\mathbb{K}[x]$ invariants par permutation des variables sont engendrés algébriquement par les invariants σ_j.

Exercise (Principe de moindre action et invariants de Hilbert)**.** *Le théorème de Noether affirme qu'à toute transformation infinitésimale qui laisse invariante l'intégrale d'action d'un système physique, on peut faire correspondre une grandeur qui se conserve. Trouver une formulation variationelle pour retrouver les polynômes symétriques comme invariants sous l'action du groupe symétrique, ou plus générlement une formulation lagrangienne qui fournisse l'action et un calcul explicite des invariants en théorie classique de Hilbert.*

Du groupe fondamental de Poincaré, au groupe de Galois via le groupe des tresses d'Artin
Considérons $Q_s(T) = \sum_k q_k(t)T^k \in k[X]$ une famille à un paramètre $s \in \mathbb{S}^1$ de polynômes en une variable T. On suppose que Q_s est séparable pour tout s, c'est à dire premier avec sa dérivée, ou encore à racines simples dans (une clôture algébrique de) $\mathbb{K}$.

Cela revient à demander que ses coefficients $[q_0 : \cdots : q_n] \in \mathbb{KP}^n$ se déplacent dans le complémentaire Γ d'une hypersurface algébrique Σ^{n-1} définie par l'annulation du discriminant:

$$\Delta(p_0, \dots, p_n) = \mathrm{res}(P, P') = \prod_{i \neq j} x_i - x_j = \prod_j P'(x_j)$$

En effet, Q n'est plus séparable dès que deux des x_j sont égaux. Le polynôme Δ est symétrique en les racines donc c'est en fait un polynôme en les coefficients q_k et son annulation définit bien une hypersurface algébrique Σ^{n-1} de l'espace $\mathbb{KP}^n$ qu'on appelle le discriminant.

Question. *Quelle est l'espression de Δ en termes des p_k ? Quelle est la géométrie (singularités) et la topologie (groupe fondamental, homologie) de cette hypersurface algébrique ?*

Lorsque le polynôme Q_s (c'est à dire ses coefficients $[q_0(s) : \cdots : q_n(s)]$) décrit une courbe fermée dans le complémentaire du disciminant $\Gamma^n = \mathbb{KP}^n \setminus \Sigma^{n-1}$, les racines $x_j(s)$ se déplacent dans $\mathbb{K}$ et définissent une tresse. On a donc une représentation du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma^n)$ dans le groupe des tresses B_n qui s'envoie ensuite naturellement dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

La question que l'on se pose est donc celle de la surjectivité du morphisme $\pi_1(\Gamma^n) \to \mathfrak{S}_n$. Autrement dit, est-ce que tout élément de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{K}}(Q_0)$ peut être réalisé par un chemin Q_s dans Γ^n ? Ce même, quelle est l'image dans le groupe des tresses du morphisme $\pi_1(\Gamma) \to B_n$? Tresses semi-positives ? Et si maintenant si on demande à ce que Q_s reste dans une certaine sous variétée algébrique Γ' de Γ^n (par exemple les polynômes réciproques qui sont séparbles), est-ce que le morphisme $\pi_1(\Gamma') \to Gal_{\mathbb{K}}(Q_0)$ est surjectif ?

Question. *Que se passe-t-il si on autorise un degré variable mais fini ? On a la filtration croissante des espaces projectifs privés de leur discriminant Γ^n, une représentation du groupe fondamental de son complémentaire dans $\varinjlim B_n$, puis dans le groupe $\varinjlim \mathfrak{S}_n$. C'est sûr ? Le groupe fondamental d'une limite croissante... (sphère cornue d'Alexander...)*