

# Calcul différentiel quantique et fonction zeta de Riemann

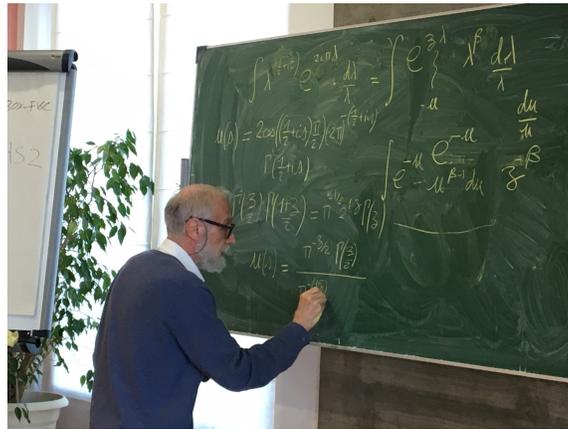
A.C.

Décembre 2019

## Résumé

En Décembre 2019, les élèves du département de mathématiques de l'ENS Lyon ont passé un week end au Château du Goutelas en compagnie d'Alain Connes. Ce document en rassemble les notes, celles de leurs propres exposés introductifs, et d'autres concernant certains développements d'Alain Connes.

L'objectif des exposés est d'expliquer un outil formidable, le calcul différentiel quantique. Il permet de comprendre sous un nouveau jour deux espaces fondamentaux : l'espace temps de la physique et l'ensemble des nombres premiers. Le premier exemple servira de modèle pour bâtir la théorie ainsi que de guide à l'intuition tandis que le second est l'objet qui nous intéressera.



**Remerciements.** Les élèves ayant présenté des exposés pendant le week end, à savoir Vincent Garot, Salim Alloun et Colin Fourel sur la théorie spectrale, Sonia Velasco sur l'analyse de Fourier, Victor Issa sur la fonction  $\zeta$  et Paul Meunier sur le calcul différentiel quantique, en ont rapporté des notes pour contribuer à ce compte rendu. Enfin, Hai-Chau Nguyen a également rédigé un appendice relatant les mathématiques de la soirée musicale improvisée par Alain Connes. Que toutes ces personnes en soient remerciées.



Figure 1 – Photo de groupe, Château du Goutelas, Décembre 2019

# 1 Panorama

## 1.1 Quelles variables pour notre univers physique

**Question directrice.** L'univers est-il continu ou discret ? Voilà une formidable question, qui suppose au préalable que l'on s'entende sur le sens donné au mot « univers » avant de le soumettre à des notions mathématiques aussi précises que la continuité.

**Aperçu historique.** Une façon d'interpréter l'univers qui nous vient de l'antiquité grecque, consiste à l'identifier avec l'espace, et la matière qui l'occupe : on peut donc se demander s'il existe des particules insécables, ou au contraire dont la taille tend vers zéro (pourvu que l'on s'entende sur la définition de particules ou de leur taille). C'est ainsi que Démocrite proposa il y a 2500 ans l'existence de telles entités qu'il baptisa « atomes », et que Lucrèce fit un peu plus tard l'exégèse du modèle atomique (entre autres) dans son célèbre poème *De rerum natura*.

On retrouve à la même époque des réflexions analogues pour la dimension temporelle, par exemple quand Zénon formula son fameux paradoxe de la tortue poursuivie par Achille. Cet exemple a souvent servi d'expérience de pensée pour illustrer diverses théories physiques ou mathématiques, allant du calcul infinitésimal au principe d'incertitude de Heisenberg. Le philosophe Henry Bergson prétend le résoudre dans *Matière et Mémoire* [2] en postulant que même si les distances peuvent être divisées à l'infini, le temps lui ne peut pas l'être.

**Approches modernes.** Au 20<sup>e</sup> siècle les notions d'espace et de temps sont réunies dans la théorie de la relativité générale : l'espace-temps forme une variété Lorentzienne de dimension 3+1, sur laquelle évoluent des champs, à commencer par le tenseur d'énergie-impulsion qui vit dans le cotangent et dont l'évolution est dictée par l'équation aux dérivées partielles d'Einstein. On peut de même reformuler dans ce contexte classique les équations de Maxwell pour le champ électromagnétique. Toujours d'actualité, cette théorie fournit en particulier la meilleure description que l'on ait du mouvement des corps célestes dans le champ gravitationnel, du moins à grande échelle, y compris lorsque les vitesses avoisinent celle de la lumière. La relativité générale, s'appuyant sur la géométrie Riemannienne des variétés, présuppose donc le caractère continu de l'espace-temps, mais la question n'est pas résolue pour autant. . .

En effet les forces nucléaires qui régissent la structure fine de la matière à l'échelle sous-atomique, c'est-à-dire les deux interactions fondamentales qui s'ajoutent à l'électromagnétisme et la gravitation, sont dictées par les lois de la physique quantique du modèle standard : les équations d'évolution prennent alors des formulations Hamiltoniennes, c'est ce que l'on appelle la théorie quantique des champs. Même l'électromagnétisme (très intense à l'échelle atomique) rentre dans ce cadre de manière cohérente quand on exprime les équations de Maxwell en mécanique Lagrangienne ; c'est d'ailleurs cette reformulation qui historiquement, inspira le développement de la théorie quantique des champs. Ses prédictions en font la théorie la plus convaincante sur le plan expérimental. Or en mécanique quantique, nous manipulons des variables tantôt continues et tantôt discrètes, comme en témoigne la dualité onde-particule.

Nous n'avons à l'heure actuelle aucun modèle satisfaisant qui associe ces deux théories, c'est-à-dire une explication quantique de la gravitation. La recherche d'une telle unification suggère de trouver un contexte dans lequel cohabitent les notions de variables discrètes et continues.

**La notion de variable.** Pour analyser mathématiquement un système physique nous utilisons des *variables*, que ce soit pour mesurer des longueurs, peser les masses, dénombrer les molécules dans un réseau cristallin, ou quantifier les états d'énergie d'un atome d'hydrogène. De toute évidence nous avons besoin de pouvoir considérer différentes échelles, et dans le cas présent où c'est la structure locale de l'univers qui nous intéresse, des échelles de plus en plus petites (les questions concernant sa finitude ou plus exactement son caractère borné conduirait également à des échelles de plus en plus grandes). Les variables adaptées pour la description de l'infiniment petit, ou plutôt de l'arbitrairement petit, sont les variables *infinitésimales*. Ces idées remontent à l'époque où Newton inventait son calcul infinitésimal : CITE

In a certain problem, a variable is the quantity that takes an infinite number of values which are quite determined by this problem and are arranged in a definite order. A variable is called infinitesimal if among its particular values one can be found such that this value itself and all following it are smaller in absolute value than an arbitrary given number.

Ceci étant dit, la définition précise que nous donnerons au mot « variable » dépendra de l'usage que nous souhaitons en faire, et donc de l'interprétation des données du problème.

**Du classique au quantique.** Classiquement, une variable est la donnée d'une application d'un ensemble  $X$  vers  $\mathbb{R}$  et pour que la variable prenne en ensemble continu de valeurs, il faut que  $X$  soit indénombrable ; mais alors toute variable discrète définie sur un tel espace devra prendre certaines valeurs avec des multiplicités infinies. La grande idée pour faire coexister variables discrètes et continues émergea d'une découverte d'Heisenberg alors qu'il étudiait la formule du produit de Ritz-Rydberg pour calculer le spectre des fréquences d'une succession de filtres. Il comprit que dans un système microscopique, les quantités observables ne commutent pas : ces variables se comportent comme des opérateurs linéaires. Peu après, il démontra son fameux principe d'incertitude qui relie ce défaut de commutativité à la quantification des états d'énergie d'un système microscopique, c'est pourquoi on parle de physique quantique.

Le formalisme quantique s'est ensuite rapidement développé sous l'impulsion de nombreux physiciens et mathématiciens comme en témoignent les célèbres photos des congrès Solvay. A cette époque John Von Neumann, une autre figure ayant marqué les travaux d'Alain Connes, contribua grandement au progrès dans cette direction en systématisant l'interprétation des variables comme des éléments d'une algèbre d'opérateurs linéaires agissant sur un certain espace mathématique que l'on peut penser comme notre univers ; en physique on parle d'observables sur l'espace des états quantiques. Les résultats d'Alain Connes suggèrent que cet univers quantique, avec son algèbre d'opérateurs (les variables et les relations subtiles qu'elles entretiennent dues à la non commutativité), précèdent les notions d'espace et de temps.

**L'analyse infinitésimale par la géométrie non commutative.** Alors qu'il étudiait l'analyse non standard pendant son master sous la direction de Gustave Choquet, Alain Connes se souvient du sentiment d'insatisfaction qui le dissuada de persister dans cette voie : l'impossibilité de nommer un ensemble non mesurable empêche toute construction explicite d'un nombre non standard. Il poursuivit en thèse avec Jacques Dixmier pour développer la géométrie non commutative, domaine qu'il explorera tout au long de sa vie en l'appliquant à divers autres champs des mathématiques et de la physique. C'est également ce nouveau paradigme qui lui permettra de renverser la vapeur en revenant sur l'analyse infinitésimale avec un point de vue bien plus riche. . .

## 1.2 Un dictionnaire du classique au quantique

Les éléments de théorie spectrale et d'analyse de Fourier utiles pour comprendre l'analogie que nous sommes sur le point de présenter sont expliqués plus en détail dans les sections qui suivent. Nous encourageons les va-et-vient entre ces parties pour une lecture non linéaire.

**L'univers.** Commençons par une remarque primordiale : tous les espaces de Hilbert complexes, séparables et de dimension infinie sont isomorphes ; par exemple l'identité de Parseval montre que  $L^2(\mathbb{T}^1)$  et  $\ell^2(\mathbb{Z})$  sont isométriques d'après la représentation d'une fonction par sa série de Fourier. Nous pouvons donc parler du seul et unique espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de l'univers Platonique, celui qui modélise notre univers Physique ([12, Chapitre 1]), et choisir de le réaliser comme bon nous semble selon les convenances ; cette polysémie sera fondamentale par la suite. Nous verrons qu'elle autorise entre autres la coexistence de variables à valeurs discrètes et continues.

Elle permettra également de nous placer tantôt sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  des fonctions de carré intégrable sur le groupe  $(\mathbb{R}, +)$ , pour en étudier, via la transformée de Fourier usuelle, les propriétés de convolution additive (comme pour les séries entières) ; et tantôt sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}_+^*, dx/x)$  des fonctions de carré intégrable sur le groupe multiplicatif  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ , pour en étudier, via la transformée de Fourier adaptée, les propriétés de convolution multiplicative (comme pour les séries de Dirichlet) ; l'exploration d'une correspondance bien choisie entre ces espaces débouchera sur la synthèse des deux analyses. Cette remarque d'apparence anodine est cruciale : c'est bien les liens entre les structures additives et multiplicatives qui font toute la richesse de l'arithmétique.

Nous avons donc défini notre *univers*  $\mathcal{H}$ , espace de Hilbert complexe muni de son produit scalaire hermitien, le cadre complexe étant plus naturel du point de vue de l'analyse spectrale et pratique, si ce n'est fondamentale, pour les usages de la physique.

**Les variables.** Dressons désormais le dictionnaire (résumé en fin du préambule), entre les variables classiques et leurs analogues quantiques. Une *variable complexe* correspond à un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sur notre univers, et une *variable réelle* à un opérateur auto-adjoint. Le rapport entre variable complexe et variable réelle redonne la décomposition polaire : tout opérateur linéaire  $T$  se décompose comme le produit d'un opérateur unitaire  $U$  (ou d'une isométrie partielle sur l'image de  $T$ ) préservant le produit hermitien, et d'un opérateur auto-adjoint  $|T|$  invariant par la conjugaison hermitienne  $T \mapsto T^*$ . Le théorème spectral stipule qu'un opérateur auto-adjoint  $A$  possède un spectre  $X$  contenu dans  $\mathbb{R}$  et que  $A$  se représente comme l'opération de multiplication par la fonction identique sur  $L^2(X)$ . Nous retrouvons la notion classique de variable réelle en remplaçant l'opérateur auto-adjoint  $A$  par un élément de son spectre, expliquons en l'interprétation physique.

Un état quantique (pur) est décrit par sa fonction d'onde  $\psi$  : c'est un élément de l'espace des états  $\mathcal{H}$ . Si l'on choisit de la représenter dans  $L^2(X)$ , c'est une superposition d'ondes monochromatiques dont les fréquences sont données par le spectre de  $A$ . Mathématiquement, une onde monochromatique de fréquence  $x \in X$  correspond à la distribution de Dirac  $\delta_x$  qui, n'étant pas  $L^2$ , simule un état fictif. Effectuer la mesure correspondant à l'observable  $A$ , sur l'état quantique représenté par la fonction d'onde  $\psi$ , revient à spécialiser  $A$  en un élément de son spectre selon la densité de probabilité donnée par le module de  $\psi$  au carré ; on parle de réduction du paquet d'ondes  $\psi$ . L'état classique  $x$  obtenu à l'issue de la mesure de l'état quantique  $\psi$  n'est donc pas déterminé par avance : l'observation est soumise à l'aléa quantique contenu dans la superposition  $\psi$  des ondes pures (notons que l'état classique observé est toujours un état dit fictif).

**Variabes infinitésimales.** Une variable infinitésimale correspond à un opérateur  $K$  qui paraît arbitrairement petit en imposant (ou en connaissant) suffisamment de conditions linaires sur l'espace  $\mathcal{H}$ , donc tel que les restrictions aux sous espaces de codimension finie tendent vers zéro pour la norme d'opérateur. Cela revient à dire que la distance  $\mu_n(K)$  au sous espace  $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  des opérateurs de rang  $n$  tend vers zéro. De tels opérateurs  $T$  sont dits compacts car ils sont caractérisés par le fait d'envoyer la boule unité sur un espace relativement compact de  $\mathcal{H}$ . Nous avons donc associé aux infinitésimaux les *opérateurs compacts*, dont l'ensemble  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  constitue l'adhérence des opérateurs presque nuls, c'est-à-dire nuls sur un sous espace de codimension finie (l'union des  $\mathcal{R}_n$ ). La stabilité de  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  par somme interne et produit avec un opérateur linéaire quelconque montre que c'est un idéal bilatère de l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , tout comme on s'y attend pour les infinitésimaux vis à vis de l'ensemble des variables.

Puisqu'un opérateur auto-adjoint compact  $K$  est diagonalizable dans une base unitaire avec pour valeurs propres les  $\mu_n(K)$ , on comprend (d'après la spécialisation classique consistant à remplacer  $K$  par l'une de ses valeurs propres  $\mu_n$ ) en quoi de tels opérateurs généralisent la notion classique d'infinitésimal entendu comme suite arbitrairement petite de nombres réels. Un opérateur compact  $K$  est d'autant plus petit que les  $\mu_n(K)$  tendent rapidement vers 0, il est dit d'ordre au plus  $\alpha$  si  $\mu_n = O(n^\alpha)$ . Les inégalités de Weyl montrent que l'ordre d'un infinitésimal se comporte comme une valuation (ou degré, VERIFIER convention de signe) sur l'idéal  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ .

En résumé, la notion d'opérateur compact généralise celle d'infinitésimal, que l'on retrouve par spécialisation en un point du spectre; elle en partage toutes les propriétés naïves (idéal bilatère) hormis la commutativité, mais c'est justement là qu'apparaît toute la richesse : plusieurs opérateurs compacts du même ordre voire de même spectre peuvent être différents et entretenir des relations algébriques subtiles.

**Vers le calcul différentiel quantique.** En fait, c'est également de la non commutativité des variables quantiques qu'émerge la notion de temps. Il semble naturel d'avancer sur le plan philosophique que l'écoulement du temps résulte de l'ordre dans lequel s'enchaîne une succession d'évènements. De manière surprenante cet adage possède également un sens physique profond comme nous allons le voir dans un instant, et c'est dans sa thèse qu'Alain Connes en fournit une explication mathématique : une algèbre d'opérateurs non commutative possède, modulo les automorphismes intérieurs (les transformations de jauge), un groupe à un paramètre de transformations privilégiée :  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Out}(\mathcal{A}) = \text{Aut}(\mathcal{A}) / \text{Inn}(\mathcal{A})$ .

En général un système quantique n'est pas représenté par un état pur  $\psi$  mais par une densité de probabilité sur l'espace des états, on parle d'états mixtes. En physique il est important de considérer de tels objets car, tout comme pour l'issue d'une observation, l'évolution d'un état quantique n'est pas déterministe : elle s'étale dans le temps comme une mesure de densité sur  $\mathcal{H}$ . Sans rentrer dans les détails (car ils ne sont pas nécessaires à la compréhension des mathématiques qui vont suivre), écrivons l'équation de Von Neumann dictant l'évolution de la matrice de transition  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  d'un état mixte en termes de l'opérateur d'énergie totale  $H$  du système :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho].$$

Tout en révélant le lien entre l'écoulement du temps et la non commutativité, cette formulation équivalente à l'équation Shrödinger a le mérite d'identifier la notion classique de différentiation temporelle avec celle de différentiation quantique, consistant à prendre le commutateur avec un certain opérateur.

## Tableau récapitulatif.

Classique	Quantique
Espace $X$	Espace de Hilbert $\mathcal{H}$
Variable complexe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$	Opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
Variable réelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$	Opérateur auto-adjoint $T = T^*$
Variable positive $f \geq 0$	Opérateur positif $T \geq 0$
$f(X) \subset \mathbb{C}$	$\text{Spec}(T) \subset \mathbb{C}$
Mesure $\mu$ sur $X$	$\xi \in \mathcal{H}$
$\int_X f d\mu$	$\langle T\xi, \xi \rangle$

## Plan

<b>1 Panorama</b>	<b>3</b>
1.1 Quelles variables pour notre univers physique . . . . .	3
1.2 Un dictionnaire du classique au quantique . . . . .	5
<b>2 Théorie spectrale</b>	<b>8</b>
2.1 Opérateurs compacts . . . . .	8
2.2 Théorème spectral et valeurs singulières . . . . .	9
2.3 Calcul fonctionnel et théorème du bicommutant . . . . .	11
<b>3 Analyse de Fourier</b>	<b>15</b>
3.1 Séries de Fourier . . . . .	15
3.2 Transformée de Fourier . . . . .	20
<b>4 La formule de Riemann pour compter les nombres premiers</b>	<b>23</b>
4.1 La fonction $\zeta$ de Riemann . . . . .	23
4.2 Une propriété de symétrie de la fonction $\zeta$ . . . . .	25
4.3 Les zéros de $\zeta$ et le produit de Weierstrass de $\zeta$ . . . . .	26
4.4 Le lien entre $\zeta$ et les nombres premiers . . . . .	28
4.5 Estimation de $\pi(x)$ et fonction $\zeta$ . . . . .	30
<b>5 Calcul différentiel quantique</b>	<b>31</b>
5.1 Introduction . . . . .	31
5.2 Préliminaires algébriques . . . . .	32
5.3 Calcul différentiel quantique . . . . .	36
5.4 Calcul différentiel quantique sur $\mathbb{R}$ : préliminaires calculatoires . . . . .	38
5.5 Calcul différentiel quantique sur $\mathbb{R}$ . . . . .	44
5.6 Remerciements . . . . .	59
<b>A La musique des nombres premiers</b>	<b>61</b>
A.1 Quand la musique devient mathématique . . . . .	61
A.2 Quand les mathématiques deviennent musique . . . . .	64

## 2 Théorie spectrale

### 2.1 Opérateurs compacts

Nous considérons un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$  séparable (l'espace des états), dont les éléments souvent notés  $e, f, g$  sont pensés comme à des fonctions, muni de la norme  $|f|$  associée au produit hermitien  $\langle f | g \rangle$ . Nous désignons par  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'espace des opérateurs : endomorphismes linéaires continus de  $\mathcal{H}$ , donc Lipschitz, soit bornés pour la norme d'opérateur  $\|T\| = \sup(|Tf|/|f|)$ . Nous allons nous intéresser à une classe d'opérateurs qui généralisent ceux de rang fini et pour lesquels nous avons des résultats de réduction comme le théorème spectral.

**Définition** (Opérateurs compacts). *Un opérateur borné  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est dit compact, si  $T(B(0,1))$  est relativement compacte (pour la topologie normée); ou de manière équivalente, si pour toute suite bornée  $(f_n) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ , il existe une sous-suite de  $(Tf_n)_n$  qui converge. Ils forment un espace vectoriel noté  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ .*

**Exemple.** *Un premier exemple d'opérateurs compacts consiste en les opérateurs de rang fini. En effet si  $T$  est un opérateur de rang fini alors  $T(B(0,1)) \subset B(0, \|T\|) \cap T(\mathcal{H})$  qui est borné dans un espace de dimension finie, donc relativement compact.*

Ainsi en dimension finie, tous les opérateurs sont compacts. On se place désormais dans le cas où la dimension de  $\mathcal{H}$  est infinie, et alors  $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{H})$  puisque l'identité n'est pas compacte. En effet, une suite d'éléments  $(e_n)$  qui formant une « base Hilbertienne » de  $\mathcal{H}$  (orthonormale qui engendre un sous-espace dense) est bornée, mais n'admet pas de valeur d'adhérence puisque  $|e_i - e_j| = \sqrt{2}$  pour tout  $i, j$  distincts. Nous désignerons par  $\mathcal{R}_n$  l'ensemble des opérateurs de rang inférieur à  $n$ .

**Proposition.** *Tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang finis, et l'espace  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  des opérateurs compacts est fermé; ainsi  $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \overline{\cup \mathcal{R}_n}$ .*

Cette proposition justifie que l'on considère les opérateurs compacts comme une généralisation des opérateurs de rang fini. De plus des propriétés vraies pour les opérateurs de rang fini ont de forte chance d'être vraies pour les opérateurs compacts.

*Démonstration.* 1/ *Adhérence de  $\mathcal{K}$ .* Considérons  $T_k \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  qui converge vers  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et montrons que  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Soit  $(f_n) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée par un certain réel  $M$ , dont on cherche à extraire une sous-suite  $(g_n)$  qui fait converger  $(Tg_n)$ . On procède par extraction diagonale, en initialisant  $g_n^{-1} = f_n$ , et en construisant par récurrence sur  $i \geq 0$  une suite  $(g_n^i)$  extraite de  $(g_n^{i-1})$  qui fait converger  $(T_k g_n^i)_n$  pour tout  $k \leq i$ , ce qui est possible par compacité des  $T_k$ . On pose  $g_n = g_n^n$ . La suite  $g$  est bien extraite de  $f$ , et il reste à voir que  $(Tg_n)_n$  converge. On remarque que pour tout  $k$  la suite  $(T_k g_n)_n$  converge puisque par construction  $g$  est extraite de  $g^k$  à partir d'un certain rang. Si  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a

$$|Tg_n - Tg_m| \leq |Tg_n - T_n g_n| + |T_n g_n - T_m g_m| + |T_m g_m - Tg_m|$$

Les termes extrêmes du membre de droite tendent vers 0 puisque  $|Tg_n - T_n g_n| \leq M \|T - T_n\|$ . Il en est de même pour le terme central puisque les suites  $(T_n)$  et  $(g_n)$  sont de Cauchy, bornées par  $M$  et  $M'$ , et  $|T_n g_n - T_m g_m| \leq |T_n g_n - T_m g_n| + |T_m g_n - T_m g_m| \leq \|T_n - T_m\| M' + M \|g_n - g_m\|$ . Par conséquent  $(Tg_n)_n$  est une suite de Cauchy donc converge dans l'espace complet  $\mathcal{H}$ .

2/ *Densité de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{K}$ .* Soit  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Montrons qu'il existe  $T_n \in \mathcal{R}_n$  tel que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ . Soit  $(e_n)$  une base Hilbertienne de  $\mathcal{H}$ . Si  $P_n$  dénote le projecteur sur  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $P_n T \in \mathcal{R}_n$ .

Commençons par remarquer que  $\forall f \in \mathcal{H}, P_n f \rightarrow f$ , donc  $P_n$  converge simplement vers l'identité; cependant la convergence n'est pas uniforme puisque  $\|P_n - \text{id}\| = 1$  pour tout  $n$ . Toutefois  $(\|P_n T f - T f\|)_n$  décroît pour tout  $f \in \mathcal{H}$ , donc  $(\|P_n T - T\|)_n$  décroît vers  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

Montrons que  $\alpha = 0$ . Par l'absurde, si  $\alpha > 0$  alors pour tout  $n$ , il existe  $f_n$  de norme 1 tel que  $|(P_n T - T)f_n| > \alpha/2$ . Mais par compacité de  $T$ , il existe aussi  $(g_n)$  extraite de  $(f_n)$  telle que  $(Tg_n)_n$  converge vers un certain  $h \in \mathcal{H}$ . Par conséquent

$$|(P_n T - T)g_k| \leq |P_n T g_k - P_n h| + |P_n h - h| + |h - T g_k|$$

Or pour  $n$  et  $k$  suffisamment grand, nous avons  $|P_n T g_k - P_n h| \leq \|P_n\| |T g_k - h| \leq |T g_k - h| < \alpha/6$ , ainsi que  $|P_n h - h| < \alpha/6$  puisque  $P_n T$  converge simplement vers  $T$ , et enfin  $|h - T g_k| < \alpha/6$  par définition de  $h$ . Ainsi  $|(P_n T - T)g_k| < \alpha/2$  pour  $n$  et  $k$  assez grands ce qui est absurde.  $\square$

Rappelons que le sous-espace propre d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  pour la valeur  $\lambda \in \mathbb{C}$  est le sous-espace  $\ker(T - \lambda)$  des vecteurs  $h \in \mathcal{H}$  tel que  $Th = \lambda h$ ; s'il est non nul, on dit que  $\lambda$  est valeur propre; et le spectre de  $T$  est l'ensemble de ses valeurs propres. Des sous-espaces propres distincts sont en somme directe.

Les opérateurs de rang fini sont par définition ceux pour lesquels le sous-espace propre pour la valeur 0 est de codimension finie, en particulier toutes les autres valeurs ont un sous-espace propre de dimension finie. Cette dernière propriété est partagée par tous les opérateurs compacts.

**Proposition.** Soit  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Pour tout  $c > 0$ , la somme  $E_c$  des sous espaces propres pour les valeurs propres de module  $\geq c$  est de dimension finie. En particulier ses sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles sont de dimension finie et son spectre ne peut avoir que 0 comme point d'accumulation.

*Démonstration.* La boule  $B(0, c) \cap E_c$  est contenue dans  $T(B(0, 1))$  qui est précompact, donc  $E_c$  est localement compact, donc de dimension finie.  $\square$

**Remarque** (Attention). Il se peut qu'un opérateur compact n'ai pas de valeurs propres non nulles (c'est le cas pour les opérateurs de rang fini qui sont nilpotents). On peut également construire des opérateurs inversibles qui n'ont aucune valeur propre (penser au shift de Bernoulli sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ).

## 2.2 Théorème spectral et valeurs singulières

Comme en dimension finie, la forme sesquilinéaire non-dégénérée  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{H}$  fournit un anti-isomorphisme  $h \mapsto \langle h | \cdot \rangle$  avec son dual  $\mathcal{H}^*$  topologique. L'identification  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$  permet de définir l'anti-isomorphisme d'adjonction  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^*) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (par dualité puis échange des facteurs), qui à  $T$  associe l'unique  $T^*$  tel que  $\langle h | Th' \rangle = \langle T^* h | h' \rangle$  pour tout  $h, h'$ . Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est *auto-adjoint* si  $A^* = A$ , on parle aussi d'opérateur symétrique et on note  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  le sous-espace correspondant. L'involution  $*$  généralise la conjugaison complexe, donc si les opérateurs sont les variables complexes, les opérateurs auto-adjoints sont les variables réelles. Par exemple tout opérateur  $T$  se décompose en la somme de sa partie réelle  $(T + T^*)/2$  symétrique et de sa partie imaginaire  $(T - T^*)/2$  antisymétrique.

Un opérateur auto-adjoint est *positif* lorsque  $\langle Ah | h \rangle \geq 0$ ; un tel opérateur envoie la sphère unité sur un ellipsoïde de dimension infinie. Lorsqu'il est de plus compact, on peut parler des longueurs des demi-axes de cet ellipsoïde : elles sont données par ses *valeurs singulières* que nous définissons maintenant pour un opérateur compact auto-adjoint (positif ou non).

**Définition** (Valeurs singulières). Les valeurs singulières  $\mu_n(T)$  d'un opérateur auto-adjoint  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  sont définies comme l'infimum des  $\|T|_{E^\perp}\|$  pour  $E \subset \mathcal{H}$  parcourant les sous espaces de dimension  $n$ .

**Remarque** (Distance aux  $\mathcal{R}_n$ ). Cela peut également s'écrire  $\mu_n(T) = \inf\{\|T - R\| \mid R \in \mathcal{R}_n\}$ , autrement dit  $\mu_n(T)$  vaut la distance de  $T$  à l'espace  $\mathcal{R}_n$  des opérateurs de rang  $n$ ; aussi  $\mu_n(T) \rightarrow 0$ .

**Proposition.** Soient  $A, B \in \mathcal{K}(H)$  et  $C \in \mathcal{L}(H)$ . Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ .

1. Sous-homogénéités :  $\mu_n(AC) \leq \|C\| \mu_n(A)$  et  $\mu_n(CA) \leq \|C\| \mu_n(A)$ .
2. Sous-additivité :  $\mu_{n+m}(A+B) \leq \mu_n(A) + \mu_m(B)$ .
3. Invariance unitaire : Si  $U \in \mathcal{L}(H)$  est unitaire alors  $\mu_n(UA) = \mu_n(A)$ .

*Démonstration.* (1). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{R}_n$  est un idéal bilatère et donc si  $A$  est proche de  $\mathcal{R}_n$  alors  $AB$  est proche de  $\mathcal{R}_n$ , d'un facteur qui croît d'au plus  $\|B\|$ .

(2). La somme d'opérateurs de rang  $\leq n$  et de rang  $\leq m$  est un opérateur de rang  $\leq n+m$ . Par conséquent, si  $A$  (resp.  $B$ ) est proche de  $\mathcal{R}_n$  (resp.  $\mathcal{R}_m$ ) alors  $A+B$  est proche de  $\mathcal{R}_{n+m}$ .

(3) découle directement du fait que la multiplication par  $U$  est une isométrie de  $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|)$  et que  $\mathcal{R}_n$  est un idéal bilatère.  $\square$

En dimension finie, le théorème de Rayleigh affirme que pour un opérateur  $T$  auto-adjoint positif, la valeur singulière  $\mu_n(T)$ , c'est-à-dire le maximum de  $\langle Tx \mid x \rangle / \langle x \mid x \rangle$  pour  $x \in E^\perp$  avec  $\dim E = n$ , est égal à la  $n$ -ième plus grande valeur propre  $\lambda_n$  de  $T$ . Pour généraliser ce théorème à la dimension infinie, nous avons besoin du théorème spectral pour les opérateurs compacts.

**Théorème** (Spectral). Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint de  $\mathcal{K}(H)$ . Alors  $T$  est diagonalisable en base orthonormée, autrement-dit il existe une suite de réels  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une base hilbertienne  $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de  $H$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$ .

**Remarque.** L'hypothèse de compacité est essentielle. Par exemple, pour  $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ , l'opérateur

$$f \mapsto (x \mapsto xf(x))$$

est auto-adjoint mais n'est pas diagonalisable puisqu'il ne possède aucune valeur propre.

Si  $T$  est compact auto-adjoint positif, alors on peut ordonner ses valeurs propres par les entiers de manière décroissante. La proposition suivante constitue la généralisation annoncée du théorème de Rayleigh qui permet de relier les grandeurs géométriques  $\mu_n(T)$  avec les grandeurs algébriques  $\lambda_n$ .

**Proposition** (Spectre et valeurs singulières). Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint positif compact : en énumérant ses valeurs propres  $\lambda_n(T)$  dans l'ordre décroissant, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n(T) = \mu_n(T)$ .

*Démonstration.* La diagonalisation de  $T$  offre pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'endomorphisme  $A_n$  de rang  $n$  défini par  $\phi_k \mapsto \lambda_k\phi_k$  pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Il vérifie  $\|T - A_n\| = \lambda_n$  et donc  $\mu_n(T) \leq \lambda_n(T)$ . On peut montrer que  $A_n$  est en fait optimal.  $\square$

L'égalité entre valeurs propres et singulières se généralise à tout opérateur compact grâce à la décomposition polaire, qui permet de se ramener au cas des opérateurs compacts auto-adjoints positifs. Rappelons pour cela qu'un opérateur  $U \in \mathcal{L}(H)$  est unitaire s'il préserve le produit scalaire :  $\langle Uf \mid Uh \rangle = \langle f \mid h \rangle$ , ou encore  $|Uh| = |h|$ ; cela équivaut à  $U$  inversible et  $U^{-1} = U^*$ . Une isométrie partielle est un opérateur  $U$  tel que  $U^*U$  est un projecteur orthogonal sur un sous-espace qu'on appelle le support de  $U$ .

**Théorème.** (Décomposition polaire) Soit  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Alors il existe un unique opérateur compact auto-adjoint positif  $S$  noté  $|T|$  et une isométrie partielle  $U$  dont le support est  $\text{im } S$  tels que  $T = US$ .

*Démonstration.* En effet,  $T^*T$  est un opérateur compact auto-adjoint positif, en lui appliquant le théorème spectral on dispose de valeurs propres positives. En prenant leurs racines carrées, on peut donc obtenir  $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  tel que  $T^*T = S^2$ . Ensuite,  $U$  est défini comme  $U = TS^{-1}$ .  $\square$

**Corollaire** (Spectre et valeurs singulières). Pour tout  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  et  $n \in \mathbb{N}$ , en énumérant les valeurs propres par ordre décroissant, on a :  $\lambda_n(|T|) = \mu_n(T)$ .

### 2.3 Calcul fonctionnel et théorème du bicommutant

L'objectif du calcul fonctionnel, est de donner un sens à  $f(T)$  pour  $f$  un fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur continu (une « variable complexe »). Nous imposerons bien sûr des conditions sur  $f$ , en cherchant à les rendre de moins en moins restrictives, et en contrepartie sur  $T$ , en le supposant tantôt auto-adjoint, compact, positif (coïncidant respectivement avec les notions de « variable réelle, infinitésimale, positive » selon la philosophie présentée en introduction). Il est également naturel de demander que  $T \mapsto f(T)$  soit équivariante par changement de base de  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire par conjugaison :  $f(UTU^{-1}) = Uf(T)U^{-1}$  pour tout  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  unitaire. On parle aussi d'équivariance par automorphismes intérieurs.

**Polynômes et séries entières convergentes des opérateurs bornés.** Voyons dans un premier temps quelques cas où une définition naturelle s'impose. Comme les opérateurs bornés forment une algèbre pour l'addition et la composition d'opérateurs, nous savons déjà définir  $f(T)$  pour tout polynôme  $f \in \mathbb{C}[X]$ . On peut également considérer le cas de la fonction exponentielle :  $\exp(T) = \sum T^n/n!$ , puisque pour tout  $n$  on a  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$  et la série  $f(T)$  converge absolument, or  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  est de Banach, donc elle converge dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Plus généralement, pour toute série entière  $f$  de rayon de convergence  $R$ , on peut définir  $f(T)$  dès que  $\|T\| < R$ .

**Fonction continue d'un opérateur de rang fini.** Considérons désormais une matrice diagonale  $D$  de rang fini. Les opérations algébriques, de conjugaison complexe, et de limite, agissent indépendamment sur les coefficients de  $D$ . Par le théorème de Stone-Weierstrass, les polynômes en  $z, \bar{z}$  engendrent une algèbre dense dans les fonctions continues sur  $\mathbb{C}$ . Donc on obtient  $f(D)$  pour  $f$  continue en l'appliquant aux coefficients diagonaux. L'équivariance par automorphisme intérieur permet donc de définir l'image par toute fonction continue de n'importe quelle matrice diagonalisable de rang fini. L'hypothèse de continuité sur  $f$ , permet de la prolonger à  $\mathcal{R}$  par densité des matrices diagonalisables de rang fini. Nous avons donc montré qu'il existe une unique application d'évaluation  $\mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{L})$  continue (pour les topologies compactes-ouvertes) et à valeurs dans les fonctions équivariantes, prolongeant la définition de  $f(D)$  pour  $f \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ .

**Fonction bornée d'un opérateur borné diagonalisable.** L'hypothèse de continuité sur  $f$  est trop forte pour les applications que nous avons en tête, comme la fonction signe. Cependant, pourvu que l'on se contente des opérateurs  $T$  diagonalisables (disons de rang fini pour le moment), il est désormais désormais naturel de définir  $f(T)$  pour une fonction  $f$  quelconque en l'appliquant aux coefficients de la diagonale  $D$  qui lui est équivalente  $f(T) = Af(D)A^{-1}$ . Nous relaxons désormais la condition sur le rang, tout en préservant celle de diagonalisabilité, à redéfinir.

Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est diagonalisable s'il existe une famille libre dense  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite de nombres complexes  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n$ ,  $Te_n = \lambda_n e_n$ . On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des opérateurs diagonalisables (notons qu'il n'est pas stable par composition, ni même par addition). Pour  $f \in \mathcal{D}$ , on définit  $f(T)$  sur le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  engendré par les  $e_n$  par  $f(T)e_n = f(\lambda_n)e_n$ . Nous souhaitons prolonger  $f(T)$  par continuité à l'adhérence  $\mathcal{H}$  des  $e_n$ , et pour ce faire de manière unique il nous faut que  $f(T)$  soit compact. Nous supposons donc  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  bornée. Alors  $f$  est bornée sur  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donc l'opérateur  $f(T)$  se prolonge de manière unique à l'adhérence  $\mathcal{H}$  du sous espace engendré par les  $e_n$ , en un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Par conséquent, il existe une unique application d'évaluation qui à  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  bornée associé une fonction équivariante  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , qui coïncide avec la définition proposée pour  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$  continue bornée et  $D \in \mathcal{B}$  diagonalisable de rang fini.

**Fonction bornée mesurable d'un opérateur borné auto-adjoint.** Nous aimerions appliquer une fonction réelle bornée à un opérateur auto-adjoint quelconque, y compris non diagonalisable. Comment faire dans le cas général, en respectant les définitions déjà données? Regardons un cas particulier d'opérateur auto-adjoint non-diagonalisable pour lequel la définition de  $f(T)$  s'impose naturellement. Choisissons  $\mathcal{H} = L^2([0,1])$  et définissons pour  $t \in L^\infty([0,1])$  :

$$\begin{aligned} \pi(t) : L^2([0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]) \\ h &\longmapsto (x \mapsto t(x)h(x)) \end{aligned}$$

Bien sûr  $\pi(t)^n = \pi(t^n)$ , donc pour tout polynôme  $F$  on a  $F(\pi(t)) = \pi(F \circ t)$ . A nouveau on peut faire tendre  $F$  vers une fonction  $f$  continue  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Dans le cas général, il est naturel de poser :  $f(\pi(t)) = \pi(f \circ t)$  pour toute fonction réelle bornée  $f$ , mais cela n'a de sens que si  $f$  est mesurable! Notons  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  mesurables et bornées et  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  l'espace vectoriel des opérateurs auto-adjoints (ou symétriques) bornés. En s'appuyant sur l'exemple ci-dessus, nous allons donner un sens à  $f(T)$  pour tout  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{S}$ . Le théorème suivant nous montre que tous les opérateurs auto-adjoints peuvent être mis sous la forme de l'exemple ci-dessus, quitte à choisir le bon modèle  $\mathcal{H}$  et à conjuguer par un opérateur unitaire. Voir par exemple [15] pour la preuve.

**Théorème (Théorème Spectral).** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur auto-adjoint. Il existe un espace mesuré  $(X, \mu)$  et  $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(X, \mu)$  un opérateur unitaire, et  $t \in L^\infty(X, \mu)$  tels que  $UTU^* = \pi(t)$ , où :

$$\begin{aligned} \pi(t) : L^2(X, \mu) &\longrightarrow L^2(X, \mu) \\ h &\longmapsto th. \end{aligned}$$

La preuve du théorème construit l'ensemble  $X$  comme le *spectre* de  $T$ , à savoir le sous ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $T - \lambda$  n'est pas inversible. Il contient l'ensemble des valeurs propres, mais il se peut que  $T - \lambda$  soit injectif sans être surjectif, et donc que  $\lambda$  soit un point du spectre sans être une valeur propre. (A vrai dire il est souvent commode de prendre pour  $X$  un voisinage du spectre.)

S'inspirant de ce que l'on a dit auparavant, on adopte la définition suivante, qui coïncide bien sûr avec celles données précédemment.

**Définition.** Avec les notations du théorème spectral, on définit  $f(T)$  pour  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{S}$  par

$$Uf(T)U^* = \pi(f \circ t)$$

*Justification de la bonne définition.* Avant de poursuivre il convient d'expliquer, sans trop rentrer dans les détails, pourquoi cette définition ne dépend pas des choix effectués, à savoir de l'espace  $(X, \mu)$  et la transformation  $U$ . C'est clair lorsque  $f$  est un polynôme. Par ailleurs, la définition de  $f(T)$  ne dépend de  $f$  que sur l'image de  $t$ . Or on peut montrer que pour tous les choix de  $(X, \mu); U$ , la fonction  $t$  prendra (presque toutes) ses valeurs dans le spectre de  $T$ . On peut également montrer que ce spectre est un ensemble borné. Ainsi, seules comptent les valeurs prises par  $f$  sur un borné  $B \subset \mathbb{C}$ . Or toute fonction  $L^\infty(B)$  peut être approchée simplement par une suite de polynômes en  $z, \bar{z}$  (au sens où pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $A_\epsilon \subset B$  de mesure de Lebesgue inférieure à  $\epsilon$  et un polynôme  $F_\epsilon(z, \bar{z})$  tel que  $\|f - F_\epsilon\|_\infty < \epsilon$  sur  $B \setminus A_\epsilon$ ). En regardant les détails la démonstration du Théorème Spectral, on peut alors démontrer que si  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur le spectre de  $T$ , la suite  $(F_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f(T)$  de la définition. Le fait que  $F_n(T)$  ne dépende pas de  $(X, \mu)$  ou de  $U$  implique alors que  $f(T)$  n'en dépend pas non plus.  $\square$

**Le cas compact.** Pour mieux comprendre la signification du Théorème Spectral, examinons les cas où  $T$  est compact : quels sont dans ce cas-là  $X, \mu, U, t$ ? Rappelons qu'un opérateur auto-adjoint compact est diagonalisable dans une base hilbertienne  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec pour valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dont l'ensemble des valeurs constitue la totalité de son spectre  $X$ , et que les multiplicités sont données par une mesure  $\mu$  de comptage. Pour voir l'action de  $T$  sur un vecteur  $h \in \mathcal{H}$ , il suffit de le décomposer dans la base des vecteurs propres, ceci correspond à l'action d'un changement de base hilbertienne dont est la matrice de passage  $U$  est unitaire., puis multiplier les vecteurs  $e_n$  par les valeurs propres idoines, donc  $t(x) = x$ . On a donc bien  $UTU^*$  qui correspond à la multiplication par la fonction identité sur l'espace  $L^2(X, \mu)$ .

Remarquons qu'il suffit de connaître la décomposition de  $h$  dans la somme directe des sous espaces propres, et que l'action de  $U$  au sein d'un sous espace propre n'importe pas. Autrement dit la version minimaliste (en termes de choix effectués) du théorème spectral consiste à décomposer l'espace en combinaison de projecteurs orthogonaux sur les sous espaces propres de  $T$  (les projecteurs commutent par orthogonalité de ces derniers) :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in X} V_\lambda \quad \text{et} \quad UTU^* = \bigoplus_{\lambda \in X} \lambda p_\lambda \quad \text{donc} \quad \dim V_\lambda = 1 \implies UTU^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda \langle e_n | \cdot \rangle e_n$$

On voit que la mesure de multiplicité  $\mu$  calcule la dimension des sous-espaces propres  $V_\lambda$ , ou encore la trace du projecteur  $p_\lambda$ . Le cas général s'inspire de ces formulations en introduisant la notion de somme directe continue d'espaces de Hilbert. La section sur l'analyse de Fourier montrera le cas non compact sur un exemple familier.

**Théorème du Bicommutant.** Etant donné un opérateur auto-adjoint  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , quelles sont les opérateurs que l'on peut espérer trouver en évaluant  $f(T)$  pour une fonction bornée  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , ou réciproquement à quelle condition peut-on écrire  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sous la forme  $S = f(T)$  ?

**Définition.** Soit  $A$  une partie de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On définit le commutant de  $A$  comme l'ensemble des éléments de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  qui commutent avec tous les éléments de  $A$ . On le note  $A'$ . On définit le bicommutant de  $A$  comme le commutant de son commutant, c'est-à-dire :  $A'' = (A)'$ .

**Théorème.** Soit  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  auto-adjoint, alors  $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  s'écrit sous la forme  $f(T)$  pour une certaine fonction  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $S \in \{T\}''$ .

La démonstration du cas général ne sera pas faite car elle découle de la démonstration du Théorème Spectral. Il est cependant possible de visualiser la chose dans le cas d'un opérateur auto-adjoint compact, en décomposant l'espace  $\mathcal{H}$  en somme de ses sous espaces propres :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \\ (0) & & & \ddots \end{pmatrix} \quad f(T) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & f(\lambda_1) & \\ & & & f(\lambda_2) \\ (0) & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Un opérateur  $C$  de  $\{T\}'$  commute avec  $T$  donc il stabilise les sous-espaces propres de  $T$ , et s'écrit donc par blocs sous la forme :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

On voit alors que  $f(T)$  commute avec  $C$  et donc appartient à  $\{T\}''$ .

Réciproquement si  $S \in \{T\}''$  alors il commute avec tous les éléments ayant la forme de  $C$ . Donc il stabilise les sous-espaces propres  $V_{\lambda_j}$  de  $T$  en induisant une homothétie d'un facteur  $f(\lambda_j)$  sur chacun d'entre eux :

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & f(\lambda_1) & \\ & & & f(\lambda_2) \\ (0) & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Conclusion.** Terminons cette discussion par constater la cohabitation d'opérateurs discrets et continus : la multitude des opérateurs auto-adjoints se résume en un seul opérateur  $h(x) \mapsto xh(x)$  qui agit non-trivialement sur les fonctions  $h \in \mathcal{H}$  dont le support est contenu dans le spectre de l'opérateur. Autrement dit il n'y a qu'une variable réelle, c'est  $x$ , ce qui change c'est la mesure à support compact sur  $\mathbb{C}$  décrivant la nature de son spectre. Les généralisations successives du théorème spectral nous ont permis de définir très naturellement un calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints d'abord de rang fini, puis compacts puis non compacts autrement dit de parler des fonctions d'une variable réelle négligeable, infinitésimale puis quelconque.

### 3 Analyse de Fourier

Après avoir étudié quelques propriétés essentielles des opérateurs agissant sur l'unique espace des états (au sens de l'univers physique ou platonique décrit plus haut), il est temps de spécifier cette étude dans un contexte particulier, autant motivé par l'étude des phénomènes physiques en variation que par son caractère naturel en mathématiques, à savoir la dérivée des fonctions. Nous allons donc analyser l'opérateur  $\partial$  de différentiation (au sens des distributions) des fonctions de carrés intégrables sur la droite réelle  $\mathbb{R}$  et sur le tore unidimensionnel  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (quotient de  $\mathbb{R}$  par un sous-groupe discret non-trivial). Notons que  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{R}$  sont les deux seules variétés réelles connexes de dimension 1, la première étant compacte, l'autre non : nous verrons que l'opérateur  $\partial$  sera en conséquence compact ou non.

Dans ces deux cas, le produit scalaire Hilbertien sera donné par  $\langle f | g \rangle = \int f \times g$  et la formule d'intégration par parties montre que l'opérateur  $\partial$  est auto-adjoint (c'est évident sur le tore qui est compact sans bord, tandis que sur la droite cela découle de la propriété de nullité à l'infini des fonctions de carré intégrable). Il est donc redevable du théorème spectral, et l'équation des vecteurs propres s'écrit  $\partial e = \lambda e$ . Elle ne pose aucune difficulté et l'observation des phénomènes ondulatoires en physique (comme la mécanique d'une corde vibrante que nous verrons dans l'appendice musical) nous en exhibe (parfois approximativement) une solution : la brique élémentaire du signal est l'onde monochromatique dont la représentation mathématique est la fonction  $e_\nu : t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$  pour une onde de fréquence  $\nu = \lambda/(2i\pi)$ . Il s'agit ensuite d'étudier la décomposition de l'espace des états qui en découle, c'est-à-dire des fonctions  $L^2$  sur la base des exponentielles, qui constitue l'analyse de Fourier.

Lorsqu'un signal  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est 1-périodique, il définit un état de l'espace  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, dx)$ . Du théorème de Stone-Weierstrass il découle que les  $e_k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  forme une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$  : tout élément de  $\mathcal{H}$  se décompose comme série sur cette base. La théorie des séries de Fourier permet alors d'identifier un signal périodique de façon univoque dans  $\mathcal{H}$  à sa projection sur l'espace engendré par les  $e_k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Pourtant, dans la nature, un signal périodique pendant un temps infini ne s'observe jamais, il finit par s'atténuer dans le temps par exemple. Ainsi, un signal quelconque, généralement apériodique, définit plutôt un état de l'espace  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ . La théorie de la transformée de Fourier permet alors d'imiter celle des série de Fourier, mais cette fois-ci le spectre devient continu. Le paradigme du discret versus continu se traduit donc ici par série de Fourier versus transformée de Fourier.

#### 3.1 Séries de Fourier

Nous commençons par le cas des fonctions de carré intégrable sur le tore, pour lequel l'opérateur de dérivation est compact. Comme évoqué ci-dessus, l'idée générale derrière la théorie des séries de Fourier est de décomposer un signal périodique comme somme (éventuellement infinie) de signaux élémentaires sinusoïdaux. Le cadre hilbertien, considéré ci-après est le plus naturel, mais il ne permet pas d'identifier en tout point une fonction à sa série de Fourier car il produit seulement une égalité dans  $L^2$ . Il nous faudra donc renforcer ce contexte pour obtenir des résultats plus fins comme la formule sommatoire de Poisson qui servira dans la section 4.1.

### 3.1.1 Convergence dans le cadre $L^2$

Par commodité, toutes nos fonctions périodiques seront de périodes 1, les résultats s'adaptent aux fonctions de période quelconque. On prend donc  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, dx)$  avec  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dont le produit scalaire est donné par  $\langle g | g \rangle = \int_{\mathbb{T}} fg$ . Posons pour  $n \in \mathbb{Z}$ , la fonction de  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  définie par  $e_n(x) = e^{2i\pi nx}$ , et pour  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,

$$c_n(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-2i\pi nt} dt \quad \text{et} \quad S_n f = \sum_{k=-n}^n c_k(f)e_k.$$

Notons que pour  $f \in \mathcal{H}$ , on a  $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$  et  $S_n f$  est la projection orthogonale de  $f$  sur le sous-espace  $\text{Vect}(\{e_k \mid -n \leq k \leq n\})$  des polynômes trigonométriques de degré borné par  $n$ .

Le résultat suivant donne tout son sens à la phrase suivante de l'introduction : « L'identité de Parseval montre que  $L^2(\mathbb{T})$  et  $\ell^2(\mathbb{Z})$  sont isométriques... »

**Théorème (Identité de Parseval).** *Pour tout  $f \in \mathcal{H}$ ,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

*Autrement dit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

*est une isométrie.*

*Démonstration.* Le théorème de Pythagore donne :

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

d'où  $\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$ , donc la série des  $c_n(f)$  converge pour la norme  $\ell^2$ . Ensuite, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, les polynômes trigonométriques sont denses dans  $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  pour la norme uniforme  $L^\infty$ , et donc pour la norme  $L^2$  car sur  $\mathbb{T}$  compact la norme  $L^\infty$  domine la norme  $L^2$ . Par densité des fonctions continues dans  $\mathcal{H}$  pour la norme  $L^2$ , il en découle que les polynômes trigonométriques sont denses dans  $\mathcal{H}$  pour la norme  $L^2$ . On en déduit que  $S_n f$  converge vers  $f$  pour la norme  $L^2$ . En effet, si  $\varepsilon > 0$  on dispose d'un polynôme trigonométrique  $P$  de degré  $N_\varepsilon$  tel que  $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$ . Or les projections  $S_n$  sur une suite croissante de sous-espaces, minimisent la distance au sous-espace par orthogonalité, donc pour tout  $N \geq N_\varepsilon$  on a  $\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - P\|_2 \leq \varepsilon$ , ce qui conclut.  $\square$

**Corollaire (Inversion  $L^2$ ).** *Pour tout  $f \in \mathcal{H}$ , on a la convergence  $S_n f \longrightarrow f$  pour la norme  $L^2$  :*

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e_n$$

**Remarque (Attention).** *Les résultats précédents ne permettent pas d'obtenir pour un  $x \in \mathbb{T}$  donné, et encore moins pour tout  $x \in \mathbb{T}$ , que*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e_n(x)$$

*Ils ne permettent même pas d'établir la convergence de la série de droite. Nous verrons dans la*

### 3.1.2 Convergence ponctuelle des séries de Fourier vers la fonctions

En général, pour avoir l'égalité ponctuelle des fonctions, on montre d'abord la convergence en norme  $\ell^1$  de la série (convergence absolue), c'est-à-dire que pour  $f \in \mathcal{H}$  on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

On en déduit que  $S_n f$  converge uniformément et donc simplement, vers une certaine fonction  $g$  continue. De plus la convergence  $\ell^1$  assure que  $c_n(g) = c_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Le lemme suivant (qui découle du théorème d'isométrie de Parseval), permet alors d'affirmer que  $f = g$  dans  $\mathcal{H}$ .

**Lemme.** *Si  $f \in \mathcal{H}$  et  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  vérifient  $c_n(f) = c_n(g)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $f = g$  presque partout.*

Nous souhaitons donc une condition sur la fonction  $f$  qui assure la convergence  $\ell^1$  de ses coefficients de Fourier  $c_n(f)$ . Il y a de nombreux résultats reliant la régularité de la fonction au comportement à l'infini de ses coefficients de Fourier.

**Proposition** (Décroissance et Régularité). *Si  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  alors  $c_n(f) = o(1/n^k)$ , donc  $c_n \in \ell^{k-1}(\mathbb{Z})$ . Réciproquement si  $c_n(f) = O(1/n^{k+2})$  alors  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ .*

*Démonstration.* Pour  $k = 0$ , il faut montrer que si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  alors  $c_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \pm\infty$ . C'est le Lemme de Riemann-Lebesgues, qui se montre en utilisant l'uniforme continuité de la fonction (sur  $\mathbb{T}$  compact). Sur des intervalles assez petit, la fonction est presque constante, et pour  $n$  choisi ensuite assez grand, l'intégrale de  $e_n$  contre chaque morceau presque constant est très petite (phénomène d'oscillation rapide).

Ensuite, on raisonne par récurrence en utilisant le fait que  $x\partial$  agit sur  $f$  comme  $c_n \mapsto n c_n$ , et que l'inversion série-intégrale est possible tant que la série converge uniformément.  $\square$

En appliquant la première partie de cette proposition avec l'hypothèse  $f \in \mathcal{C}^1$  dans la discussion qui précède, on en déduit l'identification ponctuelle de  $f$  avec la somme (des séries partielles symétriques) de sa série de Fourier :

**Proposition.** *Si  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$  alors  $c_n(f) \in \ell^1(\mathbb{Z})$  et  $S_n f$  converge simplement vers  $f$ .*

### 3.1.3 Une application : la formule sommatoire de Poisson

**Théorème** (Sommmation de Poisson). *Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  telles que  $f$  et  $\partial f$  sont  $O(1/x^2)$  on a :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}.$$

On obtient en particulier pour  $x = 0$  la formule sommatoire de Poisson qui sera utile par la suite :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

**Remarque.** *Les hypothèses peuvent être affaiblies : on pourra consulter [9] pour plus de détails.*

*Démonstration.* Montrons que le terme de gauche  $G(x)$  définit une fonction continue. Comme  $f, \partial f = O(1/x^2)$ , la série des fonctions  $x \mapsto f(x+n)$  et ses dérivées, convergent normalement sur tout compact (norme  $L^\infty$ ), donc uniformément. Ainsi la limite existe, c'est une fonction  $\mathcal{C}^1$ , et « on peut dériver ou intégrer sous le signe somme ». Cette fonction  $G$  est de plus 1-périodique donc d'après le résultat de la première section on obtient que

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_0^1 G(u) e^{-2i\pi n u} du \right) \exp(2i\pi n x).$$

En utilisant la convergence uniforme et en effectuant un changement de variable on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(u) e^{-2i\pi n u} du &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(u+k) e^{-2i\pi n u} du \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u) e^{-2i\pi n u} du = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi n u} du = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

□

### 3.1.4 Correspondance algébriques : convolutions, dilatations, translations, homographies

Commençons par mettre en évidence le contexte de la section précédente. Nous avons d'abord modelé notre espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle f | g \rangle)$  sur  $(L^2(\mathbb{T}), \int fg)$ , pour étudier l'endomorphisme de dérivation  $\partial \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (ou la structure de  $\mathbb{C}[\partial]$ -module induite sur  $\mathcal{H}$ ). Comme il est autoadjoint, il correspond en termes géométriques à la polarisation de la forme sesquilinéaire hermitienne  $\int f \partial g$  par rapport au produit scalaire. Ses vecteurs propres  $e_n$  forment une base hilbertienne, donc c'est un opérateur compact. Ses sous espaces propres sont de dimension 1, et le noyau est engendré par la fonction constante  $e_0 = 1$ , en particulier la forme  $\int f \partial g$  est presque non-dégénérée.

Le théorème spectral dont il est redevable, permettant de diagonaliser la forme  $\int f \partial g$  par rapport au produit scalaire, s'exprime donc de la manière suivante. Selon les notations de la section 2, l'isométrie  $U: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  est donnée par la transformée de Fourier  $f \mapsto c_n(f)$ , et  $UTU^*$  agit sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$  comme l'opérateur de multiplication  $c_n \mapsto (2i\pi n) \cdot c_n$ .

Notons que la base des vecteurs propres de  $\partial$  est stable par multiplication  $e_m e_n = e_{m+n}$ , et engendre donc une algèbre  $\mathbb{C}[e_1, e_{-1}]$  isomorphe à l'algèbre des polynômes de Laurent, dont la base linéaire est orthogonale pour  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Par conséquent  $L^2(\mathbb{T})$ , étant le complété de cette algèbre pour la forme quadratique Hilbertienne, hérite ainsi (par dualité) d'une structure de  $\mathbb{C}[e_1^{\pm 1}]$ -module. Il est aisé de voir comment cette structure de module est transportée par transformée de Fourier sur  $L^2(\mathbb{Z})$ . En effet, si  $F = \sum a_k e_k$  est un polynôme trigonométrique, et  $g \in L^2(\mathbb{T})$ , alors  $c_n(Fg) = \sum_{j+k=n} c_j(F) c_k(g)$ .

Bien que le produit de deux fonctions  $L^2$  ne soit pas toujours  $L^2$ , il est tout de même possible de prolonger la multiplication par les polynômes trigonométrique en une multiplication partiellement définie entre des éléments de  $L^2$ . Par exemple le produit de deux fonctions lisses quelconques sur le tore reste lisse, et donc  $L^2$ . Rappelons que sur un compact, les espaces  $L^p$  sont en inclusion décroissante. L'inégalité de Hölder montre que si  $p, q \geq 2$  le produit de fonctions  $L^p$  et  $L^q$  telles que  $1/p + 1/q \leq 1/2$  tombe dans  $L^2$ ; par exemple  $p = \infty$  ou  $p = 4 = q$  conviennent.

**Proposition** (Hölder). *Soit  $(X, \mu)$  un espace mesuré quelconque et des éléments  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  tels que  $1/p + 1/q = 1/r$ . Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^q(\mathbb{T})$  alors  $fg \in L^r(\mathbb{T})$  et  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .*

A quoi correspond cette multiplication via l'isométrie de Fourier dans l'espace  $\ell^1(\mathbb{Z})$ ? Il suffit à nouveau de multiplier les séries de Fourier pour le deviner : c'est la convolution des suites. Réciproquement, le produit terme-à-terme des suites dans  $\ell^1(\mathbb{Z})$  correspond via la transformée de Fourier inverse à la convolution des fonctions.

**Définition** (Convolutions). *Pour  $f, g$  des fonctions telles que  $fg \in L^1$ , on peut définir leur convolée :*

$$f * g: x \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y) dy$$

*Pour  $a_n, b_n$  des suites telles que  $ab \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , on définit leur convolée :*

$$a * b: n \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(n-k)g(k)$$

**Proposition** (Morphisme). *La fonction 1 a pour transformée la suite  $\delta_0(n)$ . La transformée de Fourier échange la convolution et le produit point par point :*

$$c_n(f * g) = c_n(f) \cdot c_n(g) \quad c(f \cdot g) = c(f) * c(g)$$

Il découle en particulier de cette proposition que la multiplication par  $e_k$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  correspond au décalage « de Bernoulli » des indices vers la gauche itéré  $k$  fois  $c_n \mapsto c_{n-k}$ .

**Conclusion.** La transformée de Fourier correspond à l'isométrie du théorème spectral conjuguant l'action de dérivation  $\partial$  sur  $L^2(\mathbb{T})$  en la multiplication par  $2i\pi n$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

De plus elle permet d'identifier non seulement les structure de  $\mathbb{C}[X]$ -modules sur  $L^2(\mathbb{T})$  et  $\ell^2(\mathbb{Z})$  données respectivement par la dérivation  $\partial$  et la multiplication par  $2i\pi n$ , mais elle transporte également la structure des

Notons que nous avons donc sur  $L^2(\mathbb{T})$ , et même sur la sous algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ , une structure de module sur l'anneau non commutatif  $\mathbb{C}[e_1^{\pm 1}][\partial]$ , le défaut de commutation des générateurs étant mesuré par leur commutateur  $[\partial, e_1] = e_1$ . On a aussi  $[\partial, e_n] = ne_n$  et par récurrence  $[\partial^k, e_n] = n^k e_n$ .

## 3.2 Transformée de Fourier

On cherche à adapter la décomposition d'un signal périodique au cas d'un signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  apériodique défini sur tout  $\mathbb{R}$ . Si on écrit le signal  $f$  comme la limite simple lorsque  $T \rightarrow \infty$  des fonctions périodiques  $f_T(x) = f(x \bmod T\mathbb{Z})$  obtenues en périodisant la restriction de  $f$  sur un intervalle de longueur  $T$ . Chaque  $f_T$  se décompose en série de Fourier dans la famille libre de fonctions  $\exp(2ik\pi t/T)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ , et on réalise qu'en faisant tendre  $T$  vers l'infini qu'il faudra s'autoriser un continuum de pulsations, et envisager la projection de  $f$  sur la famille libre des fonctions  $\exp(ixt)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $t \mapsto \exp(ixt)$  n'est pas de carré intégrable mais seulement bornée, on commence par travailler dans le cadre  $L^1(\mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R})^*$  plutôt que  $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})^*$ .

### 3.2.1 Définition et quelques propriétés

**Définition.** Soit  $f \in L^1$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , la transformée de Fourier de  $f$  est définie par

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt} dt$$

Tout ce qui sera dit reste vrai en dimension  $d \geq 1$  quelconque à condition de remplacer  $e^{-2i\pi xt}$  par  $e^{-2i\pi \langle x|t \rangle}$ , où  $\langle x|t \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien.

Par la suite, pour  $y \in \mathbb{R}$  on désignera par  $\tau_y$  l'opérateur de translation  $\tau_y f(x) = f(x - y)$  et  $e_y$  le déphasage  $e_y f(x) = e^{2i\pi yx} f(x)$ . On notera aussi  $R$  l'involution  $Rf(x) = f(-x)$ . Voici quelques propriétés algébriques concernant les symétries de la transformée de Fourier.

**Proposition** (Symétries et correspondances). Soit  $f \in L^1$  :

- (i) Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{\tau_y f} = e_{-y} \widehat{f}$  et  $\widehat{e_y f} = \tau_y \widehat{f}$
- (ii) Pour  $a \in \mathbb{R}^*$ , si  $g(x) = f(\frac{x}{a})$  alors  $\widehat{g}(x) = |a| \widehat{f}(ax)$ , en particulier,  $\widehat{Rf}(x) = \widehat{f}(-x)$
- (iii) Si  $f, g \in L^1$ , alors  $\widehat{f\widehat{g}}$  et  $\widehat{g\widehat{f}}$  sont dans  $L^1$  et  $\int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} g\widehat{f}$

Le produit de convolution de deux fonctions  $f, g \in L^1$  est la fonction  $f * g \in L^1$  définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy$$

Notons que  $(f * g) * h = f * (g * h)$  et  $f * g = g * f$ . Aussi  $\tau_y(f * g) = (\tau_y f) * g$ .

**Proposition** (Morphisme d'algèbres). Pour tout  $f, g \in L^1$ , on a  $\widehat{f * g} \in L^1$  et  $\widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$ .

Voici quelques liens entre la régularité d'une fonction et le comportement asymptotiques de sa transformée de Fourier.

**Proposition** (Asymptotique vs Régularité). Soit  $f \in L^1$ .

- (i)  $\widehat{f}$  définit une application continue bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$
- (ii)  $\widehat{f}(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$
- (iii) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $x \mapsto x^k f(x)$  est dans  $L^1$ , alors  $\widehat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$  et  $\partial^j \widehat{f} = \widehat{(ix)^j f}$  pour tout  $j \leq k$ .  
Supposons que  $f \in \mathcal{C}^k$  et  $\partial^j f \in L^1$  pour tout  $j \leq k$ . Alors  $\widehat{f}(x) = o(1/x^k)$ .

**Remarque.** Le premier point dit que l'application de  $L^1$  dans  $L^\infty$  qui à  $f$  associe sa transformée de Fourier est continue. Le second point est souvent appelé le lemme de Riemann-Lebesgue. Le troisième dit que la transformée de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini : la transformée de Fourier  $\widehat{f}$  est d'autant plus régulière que  $f$  décroît à l'infini, et  $\widehat{f}$  décroît d'autant plus vite à l'infini que  $f$  est régulière.

### 3.2.2 Quelques exemples et applications

**Transformée de Fourier d'une gaussienne.** Soit  $\sigma > 0$ . La fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

est dans  $L^1 \cap L^\infty$  et

$$\widehat{g_\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} g_{\frac{1}{2\pi\sigma}}(x) = \sqrt{2\pi} \exp(-2\pi^2\sigma^2 x^2)$$

*Démonstration.* D'après le troisième point de la propriété ci-dessus on a que  $\widehat{g_\sigma}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et par théorème de dérivation des intégrales à paramètres on obtient que

$$\widehat{g_\sigma}'(x) = \frac{-2i\pi}{\sigma} \int_{\mathbb{R}} t e^{-2i\pi xt} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = -4\pi^2 x \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi xt} dt = -4\pi^2 \sigma^2 x g_\sigma(x)$$

où la deuxième égalité provient d'une intégration par partie. Cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur  $\widehat{g_\sigma}$  a pour solution  $\widehat{g_\sigma}(x) = \widehat{g_\sigma}(0) \exp(-2\pi^2\sigma^2 x^2) = \sqrt{2\pi} \exp(-2\pi^2\sigma^2 x^2)$ .  $\square$

Cette relation nous dit que plus la gaussienne est concentrée autour de sa valeur moyenne (plus  $\sigma$  est grand), plus sa transformée de Fourier est étalée, et réciproquement. L'inégalité de Heisenberg généralise ce phénomène omniprésent en physique pour toute fonction d'onde  $f \in L^1$ .

**L'Inégalité de Heisenberg :** en termes mathématiques, elle exprime que pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} y |\widehat{f}(y)| dy \right) \geq \frac{1}{(4\pi)^2}.$$

En physique,  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$  et  $\int_{\mathbb{R}} y |\widehat{f}(y)| dy$  sont respectivement interprétés comme l'extension spatiale d'un objet quantique et la largeur de son spectre. Ainsi, on ne peut pas imposer aux deux fonctions  $f$  et  $\widehat{f}$  d'être toutes les deux concentrées au voisinage de 0. La situation optimale réalisant le cas d'égalité correspond au cas des gaussiennes  $g_\sigma$ .

**L'équation de la chaleur.** La transformée de Fourier permet de résoudre des équations aux dérivées partielles sous de bonnes hypothèses de régularité des solutions. Considérons l'exemple de l'équation de la chaleur en dimension 1 dont l'inconnue  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2} \partial_x^2 u \\ u(x, 0) = f \end{cases}$$

pour une certaine condition initiale  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Supposons que  $u$  soit suffisamment régulière, et intégrable en la variable spatiale de sorte qu'à  $t$  fixé, la transformée de Fourier de  $u$  en la variable  $x$  soit bien définie. Notons que  $\widehat{\partial_t u} = \partial_t \widehat{u}$  et qu'une intégration par partie donne  $\widehat{\partial_x^2 u} = -x^2 \widehat{u}$ .

Ainsi en prenant la transformée de Fourier dans l'équation de la chaleur, il vient  $\partial_t \widehat{u} = -\frac{1}{2} x^2 \widehat{u}$  et  $\widehat{u}(x, 0) = \widehat{f}(x)$  de sorte que  $\widehat{u}(x, t) = \exp\left(\frac{1}{2} - tx^2\right) \widehat{f}(x) = \widehat{g_{\sqrt{t}}}(x) \widehat{f}(x) = \widehat{g_{\sqrt{t}} * f}(x)$ . L'injectivité de la transformée de Fourier (cf la transformée de Fourier inverse ci-dessous) donne  $u = g_{\sqrt{t}} * f$ .

En fait, la fonction  $g_{\sqrt{t}}(x)$  est la solution fondamentale à l'équation de la chaleur, celle dont condition initiale est un dirac à l'origine. On en déduit l'évolution de la distribution de chaleur ayant une condition initiale  $f$  quelconque en convolant avec cette solution fondamentale.

### 3.2.3 Inversion de la Transformée de Fourier

Ici on exhibe un phénomène analogue à celui de l'égalité ponctuelle d'une fonction périodique avec sa série de Fourier, mais pour la transformée de Fourier des fonctions apériodiques.

**Théorème.** Soit  $f \in L^1$  telle que  $\widehat{f} \in L^1$ . Alors  $f$  est égale à sa transformée de Fourier inverse :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \widehat{f}(t) dt.$$

Notons que la condition  $\widehat{f} \in L^1$  est à mettre en parallèle avec " $\sum_n c_n(f)$  converge absolument" qui permet d'avoir la convergence ponctuelle pour les séries de Fourier.

*Démonstration.* Pour  $\sigma > 0$ , posons  $f_\sigma = g_\sigma * f$  où  $g_\sigma$  est la gaussienne définie plus haut. Les résultats d'approximation par convolution montrent que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f_\sigma(x) \rightarrow f(x)$  lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ .

Ensuite pour  $x \in \mathbb{R}$ , définissons  $I_\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xt} \widehat{f}_\sigma(t) dt$ . En utilisant l'expression de  $\widehat{g_\sigma}$  donnée plus haut, le fait que pour deux éléments  $h_1, h_2 \in L^1$  on ait  $\int_{\mathbb{R}} h_1 \widehat{h_2} = \int_{\mathbb{R}} h_2 \widehat{h_1}$ , et que pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{e_y h_1} = \tau_y \widehat{h_1}$  on obtient que  $I_\sigma(x) = f_\sigma(x)$ .

Or pour  $t$  fixé,  $\widehat{f}_\sigma(t) = \widehat{f}(t) \widehat{g_\sigma}(t)$  tend vers  $\widehat{f}(t)$  lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ . Ainsi l'intégrale définissant  $I_\sigma(x)$  converge (d'après le théorème de convergence dominée, en utilisant  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ), vers  $f(x)$  lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ .  $\square$

### 3.2.4 La transformée de Fourier dans $L^2$

Nous aimerions désormais étendre la transformée de Fourier à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Comme l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  n'est pas inclus dans  $L^1(\mathbb{R})$  il n'est pas possible d'utiliser la définition intégrale. Cependant, nous connaissons des sous espaces denses de  $L^2$  sur lesquels la définition explicite fonctionne donc on peut la prolonger par continuité. Il existe alors un analogue de la théorie hilbertienne des séries de Fourier, à savoir qu'on peut donner un sens à l'isométrie exhibée plus haut, mais dans le cadre de la transformée de Fourier prolongée.

Notons  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact et à valeurs complexes. Comme  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1$  la transformée de Fourier est bien définie sur cet espace, et on a l'égalité des produits scalaires  $\int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}$  pour les fonctions  $f, g \in L^1 \cap L^2$ . De plus  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  pour la norme  $|\cdot|_2$ .

**Proposition.** Pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\widehat{f} \in L^2$ . De plus, l'application linéaire suivante est une isométrie :

$$\varphi: \begin{cases} (\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), |\cdot|_2) & \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}), |\cdot|_2) \\ f & \longmapsto \widehat{f} \end{cases}$$

qui par uniforme continuité, se prolonge de manière unique en une isométrie linéaire  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  appelée transformée de Fourier-Plancherel. Si  $f \in L^1 \cap L^2$ , alors  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$  presque partout.

## 4 La formule de Riemann pour compter les nombres premiers

On sait depuis Euclide qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais leur répartition est longtemps restée mystérieuse. Il a fallu attendre le xvii<sup>e</sup> siècle et les travaux d'Euler, pour que les premières avancées significatives depuis l'antiquité aient lieu. En 1737 Euler montre que la série des inverses des nombres premiers diverge en utilisant la divergence du produit infini :

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_p (1 + p^{-1} + p^{-2} + \dots) = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$

qui combiné avec l'équivalent  $-\log(1-p^{-1}) \sim p^{-1}$ , assure la divergence de  $\sum \frac{1}{p}$ . L'égalité ci-dessus reste valide si l'on remplace  $p$  par  $p^s$  et  $n$  par  $n^s$ . Rappelons au passage qu'un produit infini est dit convergent lorsque ses produits partiels convergent vers une limite *non nulle*.

Cinquante ans plus tard Gauss introduit la fonction  $\pi$  comptant les nombres premiers :

$$\pi(x) = \#\{p \text{ premier} \mid p \leq x\}$$

et conjecture que  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$  avant de préférer la formulation  $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$  avec  $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$  : ce résultat aujourd'hui connu comme « le théorème des nombres premiers » n'est démontré qu'en 1896 par Hadamard et de la Vallée Poussin. Le théorème des nombres premiers motive bon nombre de travaux en théorie des nombres au cours du xix<sup>e</sup> siècle.

En 1852, une démonstration du théorème des nombres premiers semble encore hors de portée, cependant Chebyshev parvient à établir que :

$$\liminf \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} \leq 1 \leq \limsup \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)}$$

de sorte que si le quotient  $\frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)}$  converge, alors sa limite vaut 1. Chebyshev démontre également l'encadrement suivant, valable pour  $x$  suffisamment grand :

$$0,89 \times \text{Li}(x) \leq \pi(x) \leq 1,11 \times \text{Li}(x).$$

Suite à cela, le domaine reste au point mort, jusqu'en 1859 lorsque Riemann publie un article intitulé "Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée" [14, 8], dans lequel il donne une formule exacte pour la fonction de compte  $\pi$  sous la forme d'une somme d'une série. Il obtient ce résultat en se basant sur des méthodes innovantes faisant intervenir des fonctions de la variable complexe. Le but de ce texte sera d'exposer les méthodes de Riemann et donner une preuve de sa formule pour la fonction  $\pi$ .

### 4.1 La fonction $\zeta$ de Riemann

La première section s'inspire de [4]. Commençons par introduire la fonction  $\zeta$  de Riemann, et la formule du produit qu'en avait donné Euler.

**Définition** (Fonction  $\zeta$ ). *La fonction  $\zeta$  de Riemann est la fonction analytique définie sur le domaine  $\Re(s) > 1$  par  $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ , où la somme s'étend sur les entiers strictement positifs.*

**Proposition** (Produit Eulérien de la fonction  $\zeta$ ).

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

*Démonstration.* On procède comme dans l'introduction, en développant à partir du membre de droite le produit des  $\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_k p^{-ks}$ , et en appliquant le théorème d'unique factorisation des entiers en produit de nombres premiers.  $\square$

L'idée de Riemann est alors de prolonger analytiquement la fonction  $\zeta$  sur  $\mathbb{C}$ , rappelons que si une fonction analytique définie sur un ouvert se prolonge en une fonction analytique sur un ouvert  $\Omega'$  contenant  $\Omega$ , alors un tel prolongement est unique.

**Définition** (Fonction  $\Gamma$ ). La fonction  $\Gamma$  est la fonction analytique définie sur le demi plan  $\Re(s) > 0$  par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}.$$

**Remarque.** Cette expression ressemble aux sommes de Gauss sur les anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , au sens où l'on somme le produit d'un caractère additif et d'un caractère multiplicatif, contre la mesure de Haar du groupe multiplicatif  $(\mathbb{R}_+, \times)$ . Cela fait écho à la discussion introductive en 1.2 concernant la polysémie de  $\mathcal{H}$ .

La fonction  $\Gamma$  généralise la notion de factorielle d'un entier puisqu'on a  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  et  $\Gamma(0) = 1$ , de sorte que  $\Gamma(n+1) = n!$ . Nous allons nous servir de la fonction  $\Gamma$  pour prolonger  $\zeta$  en une fonction méromorphe à tout le plan complexe. Pour cela, commençons par une identité.

**Proposition** (Lien entre  $\zeta$  et  $\Gamma$ ). Pour  $\Re(s) > 1$  on a :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

*Démonstration.* Il suffit de sommer sur  $n$  l'identité suivante :

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-nx} x^s \frac{dx}{x}.$$

$\square$

**Lemme.** La fonction  $\Gamma$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  qui ne s'annule pas et dont les pôles sont situés aux entiers négatifs.

*Démonstration.* La fonction  $\Gamma$  est définie sur le domaine  $\Re(s) > 0$ , la relation  $\Gamma(s-1) = \frac{\Gamma(s)}{s}$  permet de la prolonger à  $\Re(s) > -1$  et fait apparaître un pôle en  $s = 0$ . On procède alors par récurrence pour étendre le domaine sur les bandes  $-n-1 < \Re(s) \leq -n$  avec un pôle en  $-n$ .  $\square$

**Lemme.** Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction lisse à décroissance rapide. La fonction définie sur  $\Re(s) > 0$  par :

$$D(f, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(x) x^s \frac{dx}{x}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $D(f, -n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$

*Démonstration.* En intégrant par parties on obtient :  $D(f, s) = -D(f', s + 1)$ , et on peut donc la prolonger comme pour la fonction  $\Gamma$  ; la valeur en  $-n$  s'obtient également par récurrence.  $\square$

**Théorème.** La fonction  $\zeta$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , holomorphe en dehors d'un pôle simple en  $s = 1$ .

*Démonstration.*  $\zeta(s + 1) = \frac{1}{s}D(\beta, s)$  où  $\beta(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  satisfait les hypothèses du lemme.  $\square$

La fonction  $\beta(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  dans l'intégrande est développable en série entière en 0 :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$$

où  $B_n$  sont les nombres de Bernoulli, qui apparaissent notamment en combinatoire. On a  $B_0 = 1$  donc on obtient, en utilisant la valeur de  $D(\beta, -n)$  aux entiers donnée par le lemme précédent, que le résidu de  $\zeta$  en  $s = 1$  vaut 1 et par conséquent :  $\zeta(s + 1) \sim_0 1/s$ . On trouve également que  $\zeta(-n + 1) = (-1)^{n+1} B_n/n$  ; par exemple  $\zeta(-1) = -1/12$  et  $\zeta(0) = 1/2$ . De plus  $\zeta(-2n) = 0$  puisque l'on déduit  $B_{2n+1} = 0$  de la parité de l'expression  $t \mapsto \beta(t) + t/2$ .

## 4.2 Une propriété de symétrie de la fonction $\zeta$

**Définition** (Fonction  $\zeta$ ). La fonction  $\zeta$  est la fonction entière définie par  $\zeta(s) = \frac{\Gamma(s/2)\pi^{s/2}}{\pi^{s/2}}(s - 1)\zeta(s)$ .

**Théorème** (Équation fonctionnelle de  $\zeta$ ). Pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , on a  $\zeta(s) = \zeta(1 - s)$ , c'est-à-dire :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s)$$

*Démonstration.* En sommant sur  $n$  l'identité :

$$\frac{1}{n^s} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{n^2 \pi}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{du}{u} = \int_0^\infty \exp(-n^2 \pi u) u^{s/2} \frac{du}{u}$$

et en faisant le changement de variables  $v = 1/u$ , on obtient :

$$\zeta(s) = \frac{s(s-1)}{2} \int_0^\infty \psi(u) u^{s/2} \frac{du}{u} = \frac{s(s-1)}{2} \left( \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{u}\right) u^{-s/2} \frac{du}{u} + \int_1^\infty \psi(u) u^{s/2} \frac{du}{u} \right)$$

avec  $\psi(u) = \sum_{n \geq 1} \exp(-n^2 \pi u)$ . Etudions la fonction  $\theta = 1 + 2\psi$ .

**Lemme** (Équation fonctionnelle de  $\theta$ ). La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-n^2 \pi u)$  vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\theta\left(\frac{1}{u}\right) = \sqrt{u} \theta(u)$$

*Preuve du lemme.* Soit  $g : x \mapsto \exp(-x^2 u \pi)$ . On a  $\hat{g} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left(\frac{-y^2 \pi}{u}\right)$  où l'on convient que  $\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-2i\pi t x) dt$ . Par la formule sommatoire de Poisson on a alors :

$$\theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) = \frac{1}{\sqrt{u}} \theta\left(\frac{1}{u}\right)$$

$\square$

Comme  $\psi(u) = (\theta(u) - 1)/2$ , on en déduit que  $\psi(\frac{1}{u}) = \sqrt{u}\psi(u) + \frac{1}{2}(\sqrt{u} - 1)$ , et par suite :

$$\zeta(s) = \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \psi(u) \left( u^{s/2-1} + u^{(1-s)/2-1} \right) du - \frac{1}{2}.$$

Ceci vaut pour  $\Re(s) > 1$ , mais comme les deux membres de cette égalité sont analytiques, cette égalité est en fait vraie sur  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Cette propriété permet d'expliciter le prolongement de  $\zeta$  à gauche de 0, ainsi que de calculer les valeurs de  $\zeta$  aux entiers positif connaissant sa valeur aux entiers négatifs. C'est une façon de prouver les identités  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  et  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ , trouvées auparavant par Euler.

### 4.3 Les zéros de $\zeta$ et le produit de Weierstrass de $\zeta$

Soit  $P$  un polynôme ne s'annulant pas en 0, et notons  $z_1, \dots, z_n$  ses racines. D'après Gauss :

$$P(s) = P(0) \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{s}{z_k} \right)$$

En pensant à une fonction entière comme un polynôme généralisé, on peut espérer pouvoir trouver une formule analogue, et montrer que si  $f$  est entière s'annulant en les  $\{z_j\}$  alors :

$$f(s) = f(0) \prod_n \left( 1 - \frac{s}{z_n} \right)$$

Weierstrass a donné des critères généraux pour l'existence d'une telle écriture ([16] chap. VIII). En particulier, les fonctions entières avec des zéros « assez loin de l'origine » peuvent en effet se factoriser ainsi. Nous n'énoncerons pas précisément ce théorème technique ici : nous nous contenterons de localiser les zéros de  $\zeta$  assez précisément pour pouvoir l'appliquer, et nous admettrons l'écriture de  $\zeta$  sous cette forme de produit, dit de Weierstrass par la suite.

**Théorème** (Localisation des zéros de  $\zeta$ ). *Les zéros de  $\zeta$  se situent dans la bande  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ , que l'on appelle bande critique.*

*Démonstration.* La fonction  $\zeta$  est définie par un produit convergeant à droite de 1, par conséquent  $\zeta$ , et donc  $\zeta$ , n'admettent pas de zéro dans le domaine  $\Re(s) > 1$ . Comme  $\zeta(s) = \zeta(1-s)$  on en déduit que les zéros de  $\zeta$  sont bien dans la bande  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ .  $\square$

On en déduit que les zéros de la fonction  $\zeta$  sont localisés dans les deux régions suivantes. Il y a d'une part les zéros (dits critiques) dans la bande critique  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ , qui sont exactement les zéros de  $\zeta$ ; et d'autre part les zéros (dits triviaux) situés aux entiers négatifs pairs, correspondant aux pôles de  $\Gamma$ , et que l'on a déterminé dans la section 4.1.

**Définition** (Fonction de répartition des zéros). *Pour  $T > 0$ , notons  $N(T)$  le nombre de zéro non triviaux de  $\zeta$  dans la bande critique dont la partie imaginaire est comprise entre 0 et  $T$ , c'est-à-dire le nombre de zéros de  $\zeta$  de partie imaginaire positive et inférieure à  $T$ . De même on note  $N_0(T)$  le nombre de zéro de  $\zeta$  sur la droite critique  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  dont la partie imaginaire est située entre 0 et  $T$ .*

L'équation fonctionnelle assure que chaque zéro  $\rho$  de  $\zeta$  de partie imaginaire positive est "associé" à un zéro de partie imaginaire négative à savoir  $1 - \rho$  c'est pourquoi on se restreint aux zéros de partie imaginaires positive.

**Théorème** (Distribution dans la bande critique). *On a  $N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$ .*

La preuve de ce résultat n'apparaît pas dans l'article de Riemann, il faut attendre près de 45 ans pour qu'en 1905 Von Mangoldt en fournisse une. De plus l'ensemble des zéros non triviaux est sans point d'accumulation dans la bande critique par le principe des zéros isolés, ainsi on peut ranger les zéros non triviaux de partie imaginaire positive  $\{\rho_n\}$  par partie imaginaire croissante. On montre, en utilisant  $N(\Im(\rho_n)) = n$ , que le théorème précédent équivaut à  $\Im(\rho_n) \sim 2\pi \frac{n}{\log n}$ .

*Schéma de preuve du théorème.* Comme les zéros de  $\zeta$  sont simples, on exprime  $N(T)$  par la formule des résidus en intégrant sur le bord  $\gamma$  du rectangle  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  et  $0 \leq \Im(s) \leq T$  :

$$N(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

Pour mener à bien l'estimation on écrit :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} + \log \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

et on utilise la formule de Stirling pour  $\Gamma$  et la formule de Jensen pour le dernier terme. □

Le théorème précédent assure que le théorème de Weierstrass s'applique, et l'on peut donc exprimer  $\zeta$  comme le produit :

$$\zeta(s) = \zeta(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

indexé par les zéros de  $\zeta$ , c'est-à-dire les zéros non triviaux de la fonction  $\zeta$ . Nous admettrons cette écriture par la suite.

Riemann constate que tous les zéros qu'il est en mesure de calculer sont tous sur la droite critique  $\Re(s) = 1/2$ , mais une localisation aussi précise des zéros n'est pas nécessaire pour la suite de son article, et n'en fournit donc pas de preuve. Il formule tout de même sa célèbre :

**Conjecture** (Hypothèse de Riemann). *Les zéros non triviaux de la fonction  $\zeta$  se situent sur la droite critique  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ .*

La conjecture n'a toujours pas été prouvée ou réfutée à ce jour (novembre 2019), mais on sait démontrer qu'une infinité de zéros non triviaux se trouvent sur la droite critique. Plus précisément, Conrey démontra en 1989 que :

$$\liminf \frac{N_0(T)}{N(T)} \geq \alpha > \frac{2}{5}$$

où  $\alpha = 0,4077\dots$ , ce qui signifie qu'au moins  $\frac{2}{5}$  des zéros non triviaux se situent sur la droite critique. Dans la première moitié du xx<sup>e</sup> siècle, Hilbert et Polya proposent une approche pour l'hypothèse de Riemann par la théorie spectrale, en suggérant que pour démontrer que tous les zéros non triviaux de la fonction  $\zeta$  sont sur la droite critique il suffirait de construire un opérateur auto-adjoint dont le spectre contient l'ensemble des zéros de la fonction  $t \mapsto \zeta(1/2 + it)$ .

#### 4.4 Le lien entre $\zeta$ et les nombres premiers

Cette section établit la formule exacte trouvée par Riemann pour la fonction  $\pi$ , elle constitue le point culminant de son article de 1859. Elle prend la forme d'un terme principal, donné par la fonction Ri (définie plus loin), auquel on retire une somme indéxée par les zéros critiques :

**Théorème** (Formule de Riemann).

$$\pi(x) = \text{Ri}(x) - \sum_{\rho} \text{Ri}(x^{\rho}) + \text{négligeable}$$

Partons du produit eulérien de la fonction  $\zeta$  valable pour  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 1$  :

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \text{ainsi} \quad \log \zeta(s) = \sum_p \sum_{n \geq 1} p^{-ns} / n,$$

mais en écrivant  $p^{-ns} = \int_{p^n}^{\infty} sx^{-s} \frac{dx}{x}$  on a :

$$\sum_p p^{-ns} = \sum_p \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{p^n \leq x\}} sx^{-s} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} sx^{-s} \sum_p \mathbb{1}_{\{p^n \leq x\}} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} sx^{-s} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \frac{dx}{x},$$

donc en sommant sur  $n$  on obtient :

$$\log \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} sx^{-s} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} sx^{-s} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{n} \right) \frac{dx}{x}.$$

**Définition.** Soit  $\Pi$  la fonction définie par  $\Pi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$

Nous avons donc montré l'identité suivante exprimant le fait que la fonction  $s \mapsto \frac{1}{s} \log \zeta(s)$  est la *transformée de Mellin* de  $\Pi$  :

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} \Pi(x) x^{-s} \frac{dx}{x}$$

d'où l'on en déduit, par inversion de Mellin (voir [10]), que pour tout réel  $a > 1$  :

$$\Pi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

On calcule cette intégrale en exprimant  $\zeta$  en termes de  $\zeta$ , que l'on factorise produit de Hadamard :

$$\zeta(s) = \frac{s(s-1)}{2} \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}} \zeta(s) \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \zeta(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

et l'on obtient (après un peu d'effort) le théorème suivant :

**Théorème** (Une formule exacte pour  $\Pi$ ).

$$\Pi(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1)(\log(t))}$$

Il s'agit désormais d'exprimer  $\pi$  en fonction de  $\Pi$ , introduisons pour ce faire la célèbre :

**Définition** (Fonction de Möbius). Soit  $\mu$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $\mu(n) = 0$  lorsque  $n$  a un facteur carré, et  $\mu(n) = (-1)^r$  lorsque  $n$  est sans facteur carré et admet  $r$  diviseurs premiers (distincts).

**Proposition** (Inverse de  $\mu$  pour la convolution).  $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$  où  $\delta(n) = 1$  si  $n = 1$  et 0 sinon.

*Démonstration.* le résultat est clair pour  $n = 1$ , et pour  $n > 1$  en considérant  $p_1, \dots, p_r$  les facteurs premiers de  $n$ , on a :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \dots p_r} \mu(d) = \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} (-1)^n = (1-1)^r = 0$$

□

**Proposition** (Inversion de Möbius). Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$  à support fini.

$$\text{Si } g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{alors } f(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} g\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

*Démonstration.*

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} g\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{nm} f\left(x^{\frac{1}{nm}}\right) = \sum_{r \geq 1} \sum_{d|r} \frac{\mu(d)}{r} f\left(x^{\frac{1}{r}}\right) = \sum_{r \geq 1} \delta(r) f\left(x^{\frac{1}{r}}\right) = f(x)$$

□

**Corollaire.** Il suit alors de la définition de  $\Pi$  que l'on a :

$$\pi(x) = \sum \frac{\mu(n)}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

**Définition.** On note  $\text{Ri}$  la transformée de Möbius inverse de  $\text{Li}$  c'est-à-dire :

$$\text{Ri}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

En appliquant une transformée de Möbius à la formule exacte pour  $\Pi$ , et en notant que la transformée de Möbius d'une fonction positive qui diverge moins vite que  $1/(x-1)$  en  $1^+$  est bornée, on en déduit la formule de Riemann :

**Théorème** (Formule de Riemann).

$$\pi(x) = \text{Ri}(x) - \sum_{\rho} \text{Ri}(x^{\rho}) + O(1)$$

## 4.5 Estimation de $\pi(x)$ et fonction $\zeta$

Dans la formule de Riemann pour la fonction  $\pi(x)$ , il apparaît trois types de termes. Un terme principal  $\text{Ri}(x)$  provenant de  $\text{Li}(x)$ , des termes oscillants  $\text{Ri}(x^\rho)$  qui proviennent des  $\text{Li}(x^\rho)$ , et des termes négligeables en l'infini provenant de la constante et de l'intégrale.

On a  $|\text{Ri}(x^\rho)| \simeq |x|^{\Re(\rho)} / |\rho \log x|$ , et par conséquent un bon contrôle sur les parties réelles des zéros non triviaux de la fonction  $\zeta$  donne un bon contrôle sur les termes oscillants, et donc un meilleur terme d'erreur entre  $\pi$  et  $\text{Ri}$ .

Empiriquement, rien que le premier terme  $\text{Ri}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}(x^{\frac{1}{n}})$  fournit une bien meilleure approximation de  $\pi(x)$  que celle donnée initialement par Gauss, puisque l'on a de manière quasi-optimale pour  $x < 10^7$  :

$$|\pi(x) - \text{Ri}(x)| \leq 88 \quad \text{et} \quad \left| \pi(x) - \frac{x}{\log(x)} \right| \leq 339$$

On remarque que  $\frac{x}{\log x}$  sous-estime la fonction  $\pi$ ; on pourrait penser que  $\text{Li}(x)$  surestime  $\pi$  mais en réalité  $\pi(x) - \text{Li}(x)$  change de signe un infinité de fois; ce fait a été démontré par Littlewood en 1914, la meilleure borne que l'on connaisse pour l'abscisse de premier changement de signe est  $10^{315}$  (sous l'hypothèse de Riemann). C'est ici que les travaux de Riemann s'achèvent, l'objectif suivant est d'estimer les parties réelles des zéros de la fonction  $\zeta$  pour obtenir de meilleures estimations de  $\pi$ . En 1896, De la Vallée Poussin et Hadamard montrent que la fonction  $\zeta$  ne s'annule pas sur la droite  $\Re(s) = 1$ , ce qui suffit à prouver le tant convoité théorème des nombres premiers. En 1899, De la Vallée-Poussin améliore le terme d'erreur du théorème des nombres premiers en  $O(x \exp(-c(\log x)^{1/2}))$ . La meilleure estimation de  $\pi$  connue à ce jour fut établie par Richert en 1967 :

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-c'(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}))$$

en prouvant que la fonction  $\zeta$  n'admet aucun zéro critique dans la région des  $s = \sigma + it$  vérifiant  $\sigma > 1 - d(\log t)^{-2/3}(\log \log t)^{-1/3}$ . Finalement, l'hypothèse de Riemann prévoit que la distribution des nombres premiers est la « plus régulière possible » puisque si l'hypothèse de Riemann était fautive, par symétrie par rapport à la droite critique il existerait un zéro non trivial de partie réelle  $> \frac{1}{2}$ , ce qui donnerait un terme oscillant  $|\text{Ri}(x^\rho)| \simeq |x|^{\Re(\rho)} / |\rho \log x|$  de grande amplitude. L'hypothèse de Riemann est en fait équivalente à l'estimation asymptotique suivante :

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O(\sqrt{x} \log x)$$

Mentionnons pour finir que Erdos et Selberg ont donné en 1949 une preuve dite élémentaire du théorème des nombres premiers, c'est-à-dire qui n'utilise pas de fonctions de la variable complexe.

## 5 Calcul différentiel quantique

Cette partie a pour objectif de présenter le calcul différentiel sur une algèbre involutive, dit calcul différentiel quantique, développé par Connes dans [5]. La section 5.2 introduit quelques définitions. Dans la section 5.3, les bases algébriques du calcul différentiel quantique et de sa cohomologie associée, la cohomologie cyclique, sont présentées. La section 5.4 rassemble le matériel nécessaire à la section 5.5. La section 5.5 est consacrée à l'élaboration d'un calcul différentiel quantique sur l'algèbre  $L^\infty(\mathbb{R})$ , vu comme la contrepartie quantique du calcul différentiel classique défini sur l'algèbre  $C^1(\mathbb{R})$ . L'essentiel de l'article suit le début des sections 1 et 3 du chapitre 4 du livre fondateur de Connes [6].

### 5.1 Introduction

L'espace de Hilbert est un merveilleux espace de travail pour les théoriciens de la mécanique quantique. Il s'est révélé un cadre particulièrement adapté et proche du monde quantique pour en fournir un modèle théorique d'une excellence et d'une précision jamais égalées dans l'histoire de la physique. Un peu comme une scène de théâtre qui sert de lieu d'expression aux différents acteurs, l'espace de Hilbert est le lieu de l'action des opérateurs. Et tout comme au théâtre, les acteurs ne parlent pas tous en même temps : l'ordre dans lequel les opérateurs sont appliqués est important. C'est ce qui s'appelle la non commutativité du produit des opérateurs. Elle fait du monde des opérateurs de l'espace de Hilbert un univers complexe et fascinant pour les mathématiciens, lourd d'une géométrie belle et peu accessible : la géométrie non commutative. Explorer, découvrir et adapter les outils classiques à ce nouveau monde a été la principale contribution et l'objet premier de la vie mathématique d'Alain Connes (pour une courte autobiographie mathématique d'Alain Connes, la lectrice ou le lecteur intéressé pourra se référer à [7]).

Le calcul différentiel est un des outils mathématiques les plus importants de la physique classique. Cependant, il repose sur le calcul de la dérivée d'une fonction réelle ou complexe, et ces nombres commutent : il est donc endémique du monde commutatif. Durant les années 1980, Connes a développé un calcul différentiel quantique sur l'espace de Hilbert - ou, plus précisément, sur les algèbres d'opérateurs de l'espace de Hilbert. C'est ce calcul qui est présenté ici.

L'idée fondamentale de Connes est de généraliser les dérivées aux opérateurs de l'espace de Hilbert tout en évitant la théorie des distributions. En effet, la construction des distributions repose sur la structure d'espace vectoriel des espaces de fonctions et ne fait pas du tout appel à leur structure d'algèbre, qui est donnée par la multiplication des fonctions grâce à la formule

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

C'est pourquoi le produit de deux distributions n'a que rarement du sens. Dans le but de ne pas perdre toute l'information contenue dans les propriétés algébriques des espaces de fonctions, Connes introduit une nouvelle opération différentielle, reposant sur l'intuition physique. L'équation de von Neumann suivante, équivalente à l'équation de Schrödinger, suggère à Connes un lien entre dérivée, passage du temps et non commutativité :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (1)$$

où  $H$  est l'opérateur hamiltonien (qui représente l'énergie) et  $\rho$  la matrice de transition du système. La notation  $[H, \rho]$  représente le commutateur de  $H$  et  $\rho$  défini par  $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ . Pour  $f$  un opérateur, Connes définit alors sa différentielle par un commutateur :

$$df = [F, f]$$

où  $F$  est un opérateur fixé ayant de bonnes propriétés. La différentielle d'un opérateur devient un opérateur et on peut alors multiplier les dérivées et user librement de la structure d'algèbre de l'espace des opérateurs de l'espace de Hilbert. Connes construit alors un complexe gradué comparable au complexe de de Rahm des variétés différentiables et obtient une théorie cohomologique sur les algèbres d'opérateurs, la cohomologie cyclique (voir l'article original [5]). Cette note reprend quelques éléments du chapitre 4 de l'ouvrage fondateur de la géométrie non commutative [6]. La construction algébrique du calcul différentiel quantique est l'objet de la section 5.3. Les sections 5.4 et 5.5 traitent de façon assez détaillée la construction d'un calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ .

## 5.2 Préliminaires algébriques

### 5.2.1 Espace de Hilbert

L'espace de Hilbert constitue le cadre géométrique qui permet d'accueillir les actions des algèbres involutives.

Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes vérifiant deux conditions :

1. il est muni d'un *produit hermitien* ;
2. il est complet pour la métrique associée à ce produit.

On rappelle qu'un *produit hermitien* sur un espace vectoriel complexe  $H$  est une fonction  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant, pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  et tout nombre complexe  $\lambda$  :

1.  $(u, v) = \overline{(v, u)}$  ;
2.  $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$  ;
3.  $(u, u) \geq 0$  ;
4.  $(u, u) = 0$  ssi  $u = 0$ .

La troisième condition a bien un sens, puisque, d'après la première,  $(u, u)$  est un nombre réel.

Il est ensuite aisé de vérifier que la fonction  $d(u, v) = \sqrt{(u - v, u - v)}$  satisfait à tous les axiomes d'une métrique et qu'elle permet par conséquent de munir  $H$  d'une structure d'espace métrique. La deuxième condition pour que  $H$  soit un espace de Hilbert est alors la complétude de l'espace métrique  $(H, d)$ .

**Exemple 1.** L'espace vectoriel complexe  $\mathbb{C}^n$ , pour  $n$  entier, a une structure d'espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit hermitien canonique  $(u, v) = \sum u_i \bar{v}_i$ . De plus, tout espace de Hilbert de dimension  $n$  est isomorphe  $\mathbb{C}^n$ .

**Exemple 2.** L'espace  $\ell^2(\mathbb{Z})$  formé de l'ensemble des suites  $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  de carré sommable, i.e. telles que  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i|^2 < +\infty$ , équipé du produit hermitien  $(u, v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i \bar{v}_i$ , est un espace de Hilbert de dimension infinie.

**Exemple 3.** L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  des classes d'équivalence de fonctions mesurables  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui satisfont  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 < +\infty$  pour la relation d'égalité presque partout forme un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit hermitien  $(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u\bar{v}$ .

**Exemple 4.** De manière plus générale, on considère  $(X, \mu)$  un espace mesuré, localement compact,  $\sigma$ -fini, avec  $\mu$  une mesure de Radon. L'espace  $L^2(X, \mu)$  est formé sur l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables  $u: X \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaisant  $\int_X |u|^2 d\mu < +\infty$  pour la relation d'égalité  $\mu$ -presque partout. C'est un espace de Hilbert pour le produit hermitien

$$(u, v) = \int_X u\bar{v} d\mu.$$

Cette construction appliquée à  $X = \mathbb{Z}$  avec  $\mu$  la mesure de comptage donne l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . En prenant  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue, on obtient l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Avec  $X = S^1$ , le cercle unité de  $\mathbb{C}$ , et  $\mu$  la mesure d'angle, on obtient l'espace  $L^2(S^1, d\theta)$ , qui s'identifie au sous-espace de  $L^2(\mathbb{R})$  formé des classes de fonctions  $2\pi$ -périodiques.

**Remarque 1.** L'espace  $C_c(X)$  des fonctions continues à support compact est dense dans  $L^2(X)$ . Cette densité est pour la métrique hilbertienne, autrement dit, pour la norme 2. Cela donne une autre construction de  $L^2(X)$  : on peut le voir comme le complété de l'espace  $(C_c(X), \|\cdot\|_2)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Ce fait sera utilisé par la suite sans mention explicite.

La théorie élémentaire des espaces de Hilbert (que l'on trouvera dans [15], chapitre 4, ou [3], chapitre 5) permet la classification des espaces de Hilbert grâce à l'utilisation des bases de Hilbert. Cette classification fait l'objet du théorème 3, qui sera donné sans preuve (il ne sera pas utile par la suite). Il est utile de mentionner que l'existence des bases de Hilbert requiert l'axiome du choix.

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Une *base de Hilbert* de  $H$  est une famille  $(e_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $H$  indexée par un ensemble  $I$ , telle que :

1. on a  $(e_i, e_j) = \delta_i^j$ ;
2. si  $x \in H$  est tel que  $(x, e_i) = 0$  pour tout  $i \in I$ , alors  $x = 0$ .

Ici, on a  $\delta_i^j = 1$  si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ . La première condition est donc que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille orthonormale. La deuxième condition est que l'espace orthogonal aux  $(e_i)_{i \in I}$  est réduit à 0. On rappelle sans preuves quelques théorèmes de la théorie élémentaire des espaces de Hilbert.

**Théorème 1 (Riesz).** Soit  $\varphi: H \rightarrow \mathbb{C}$  une forme linéaire continue. Alors il existe  $u \in H$  tel que pour tout  $v \in H$ , on a

$$\varphi(v) = (v, u).$$

**Théorème 2 (Parseval).** Soit  $x \in H$ , où  $H$  est un espace de Hilbert muni d'une base de Hilbert  $(e_i)_{i \in I}$ . Alors on a

$$x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i.$$

Comme en dimension finie, le théorème précédent permet la classification des espaces de Hilbert.

**Théorème 3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Alors  $H$  admet une base de Hilbert  $(e_i)_{i \in I}$  indexée par un ensemble  $I$ , et  $H$  est isomorphe à l'espace de Hilbert  $\ell^2(I)$ , où  $I$  est muni de la mesure de comptage. De plus, si  $I$  et  $J$  sont deux ensembles,  $\ell^2(I)$  et  $\ell^2(J)$  sont isomorphes ssi  $I$  et  $J$  ont même cardinal. Enfin, si  $H$  est séparable, il admet une base de Hilbert dénombrable.

**Remarque 2.** Le théorème 3 a une conséquence très pratique pour les espaces de Hilbert séparables : ils sont tous isomorphes à un sous-espace de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Comme ce dernier est lui-même séparable, il constitue en quelque sorte le plus grand espace de Hilbert séparable, et tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie lui est isomorphe.

Dans la suite, tous les espaces considérés vont être séparables et de dimension infinie, et donc isomorphes à  $\ell^2(\mathbb{Z})$  par le théorème 3. C'est pour cela que l'on parlera de l'espace de Hilbert avec un article défini. La séparabilité n'est pas une restriction gênante : en fait, la grande majorité des espaces utilisés en mathématiques sont séparables.

## 5.2.2 Algèbres involutives

On est depuis longtemps habitué à associer à  $\mathbb{C}^n$  son algèbre d'opérateurs  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ , formée par les endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$ , et, modulo le choix d'une base, à la représenter par l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  des matrices de dimension  $n$ . Un phénomène bien connu du calcul matriciel est que son produit n'est pas commutatif : les matrices de dimension supérieure ou égale à 2 ne commutent pas. Le produit matriciel est source de la richesse algébrique des algèbres de matrices. Cependant, la finitude de la dimension est très restrictive : par exemple, tous les opérateurs sont automatiquement continus. Cela impose une trop grande rigidité au modèle pour être adapté au monde quantique, où l'on rencontre très fréquemment des opérateurs non continus, comme la position ou la quantité de mouvement d'une particule. Ils correspondent respectivement à la multiplication par la fonction identité, qui est non bornée sur  $\mathbb{R}$ , et à la dérivation (pour une présentation de ce formalisme, la lectrice ou le lecteur pourra se référer à [13], section VIII.11). Mais le même processus peut être appliqué à l'espace de Hilbert, qui est, lui, de dimension infinie. C'est le modèle qu'a choisi von Neumann pour la mécanique quantique et qui a eu le succès qu'on lui connaît.

Quelques préliminaires algébriques sont nécessaires. Un *anneau involutif* est un anneau  $A$  muni d'une fonction  $*$  :  $A \rightarrow A$  vérifiant les propriétés suivantes pour tous éléments  $x, y \in A$  :

1.  $(x + y)^* = x^* + y^*$  ;
2.  $(xy)^* = y^*x^*$  ;
3.  $(x^*)^* = x$ .

L'application  $*$  est donc un antiautomorphisme involutif de  $A$ .

**Exemple 5.** C'est une généralisation algébrique de la conjugaison complexe. L'anneau  $\mathbb{C}$  muni de la conjugaison est un anneau involutif, mais aussi les matrices de dimension fixée munies de la transposition, ou plus généralement les opérateurs linéaires sur l'espace de Hilbert munis de l'adjonction.

**Exemple 6.** Une fonction mesurable  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est essentiellement bornée pour la mesure de Lebesgue s'il existe une fonction bornée  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $u = a$  presque partout. On dénote  $L^\infty(\mathbb{R})$  l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions essentiellement bornées pour la relation d'égalité presque partout. L'addition et la multiplication des fonctions passe au quotient pour munir  $L^\infty(\mathbb{R})$  d'une structure d'anneau commutatif. La fonction constante égale à 1 correspond à l'unité. Pour  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on définit  $a^* : x \mapsto \bar{a}(x)$ . On vérifie aisément que  $*$  munit  $L^\infty(\mathbb{R})$  d'une structure d'anneau involutif.

Un sous-anneau  $B$  de  $A$  sera dit *involutif* s'il est stable par l'opération  $*$ , i.e. vérifie  $B^* = B$ . La restriction de  $*$  à  $B$  munit alors  $B$  d'une structure d'anneau involutif compatible avec celle de  $A$ .

On considère  $A$  un anneau involutif commutatif et on note  $*$  son involution. Une *algèbre involutive*  $L$  sur  $A$  est une algèbre associative sur  $A$  munie d'une involution  $*$  :  $L \rightarrow L$  compatible avec l'action de  $A$  (ce qui justifie l'abus de notation) et la munissant d'une structure d'anneau involutif, c'est-à-dire satisfaisant les propriétés suivantes pour tous  $u, v \in L$  et tout  $a \in A$  :

1.  $(u + v)^* = u^* + v^*$  ;
2.  $(uv)^* = v^*u^*$  ;
3.  $(u^*)^* = u$  ;
4.  $(au)^* = a^*.u^*$ .

On remarquera l'abus de notation exploité pour la dernière propriété.

En pratique, l'anneau de base est presque toujours l'anneau des nombres complexes muni de la conjugaison complexe.

**Exemple 7.** L'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est en fait une algèbre involutive sur l'anneau des complexes.

**Exemple 8.** L'anneau  $L^\infty(\mathbb{R})$  a aussi une structure naturelle d'espace vectoriel complexe qui en fait une algèbre involutive sur  $\mathbb{C}$ .

De même, une sous-algèbre de  $L$  sera dite *involutive* si elle est stable par l'involution de  $L$ . On la munit alors d'une involution par restriction de celle de  $L$ .

**Exemple 9.** Pour  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on obtient un opérateur linéaire (abusivement) noté  $a$  :  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  défini par  $(a.u)(x) = a(x)u(x)$ , pour  $u \in L^2(\mathbb{R})$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Il est immédiat que  $a.u \in L^2(\mathbb{R})$  et que l'opérateur  $a$  est continu de norme  $\|a\|_\infty$ . Il est un peu moins immédiat (mais c'est un bon exercice) de vérifier que deux éléments différents de  $L^\infty(\mathbb{R})$  donnent deux opérateurs différents sur  $L^2(\mathbb{R})$ , que le produit dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  correspond à la composition des opérateurs, que 1 est envoyé sur l'opérateur identité, et que l'adjoint de l'opérateur fourni par  $a$  correspond à l'opérateur fourni par  $\bar{a}$ . Ces éléments permettent d'identifier  $L^\infty(\mathbb{R})$  à une sous-algèbre involutive (commutative) avec unité de  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ , l'algèbre des endomorphismes continus de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 5.2.3 Différentielle quantique

On désigne par  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert et par  $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'algèbre formée par les endomorphismes continus de  $\mathcal{H}$  munis de la composition. Rappelons que l'adjonction fait de  $\mathcal{M}$  une algèbre involutive sur  $\mathbb{C}$ . C'est sur les sous-algèbres involutives de  $\mathcal{M}$  que le calcul différentiel quantique va être développé.

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  une sous-algèbre involutive de  $\mathcal{M}$ . Un calcul différentiel va être possible sur  $\mathcal{A}$  grâce à la donnée d'un opérateur  $F \in \mathcal{M}$  satisfaisant à :

1.  $F^* = F$  ;
2.  $F^2 = \text{Id}$ .

Ces conditions sont équivalentes à demander à ce que  $F$  soit un opérateur unitaire auto-adjoint. Un tel triplet  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, F)$ , où  $\mathcal{H}$  est un exemple de l'espace de Hilbert séparable,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  est une sous-algèbre involutive, et  $F \in \mathcal{M}$  est unitaire et auto-adjoint, sera appelé un *triplet spectral* dans la suite de cette note.

Pour  $a$  et  $b \in \mathcal{M}$  deux opérateurs, on notera  $[a, b] = ab - ba$  le *commutateur* de  $a$  et  $b$ . La *différentielle quantique* d'un élément  $a \in \mathcal{A}$  est alors définie par l'opérateur

$$da = [F, a].$$

De manière abusive, le terme de *différentielle quantique* pourra référer, suivant le contexte, à  $F$  directement, ou à l'opération  $a \mapsto da$ .

### 5.3 Calcul différentiel quantique

Il est temps d'en arriver au coeur du problème. On présente ici l'opération différentielle introduite par Connes sur les sous-algèbres involutives de  $\mathcal{M}$ . Elle satisfait bien aux axiomes d'une différentielle et permet de construire un complexe gradué de de Rham donnant lieu à une théorie cohomologique : la cohomologie cyclique (découverte par Connes en 1981, voir [5]).

Soit  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, F)$  un triplet spectral. Voici comment Connes construit son complexe  $(\Omega^*, d)$  avec  $\Omega^* = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k$  et  $d$  la différentielle quantique. On pose d'abord  $\Omega^0 = \mathcal{A}$  et on définit, pour  $a \in \mathcal{A}$ , la différentielle de  $a$  par  $da = [F, a]$ .

Vérifions dans un premier temps que la définition de  $d$  satisfait bien aux axiomes d'une différentielle, c'est-à-dire que  $d$  est une opération linéaire, de carré nul, qui satisfait à la règle de Leibniz. Pour la linéarité, avec  $a$  et  $b \in \mathcal{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} d(a + \lambda b) &= [F, a + \lambda b] \\ &= F(a + \lambda b) - (a + \lambda b)F \\ &= (Fa - aF) + \lambda(Fb - bF) \\ &= [F, a] + \lambda[F, b] \\ &= da + \lambda db, \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de  $d$ .

Pour la règle de Leibniz, il vient :

$$\begin{aligned} d(ab) &= [F, ab] \\ &= Fab - abF \\ &= (Fa - aF)b + a(Fb - bF) \\ &= [F, a]b + a[F, b] \\ &= (da)b + a(db), \end{aligned}$$

donc  $d$  satisfait bien à la règle de Leibniz. Enfin, pour vérifier que son carré est nul, il est nécessaire de définir  $\Omega^k$  pour  $k > 0$  et d'y étendre la définition de  $d$ .

Pour  $k > 0$ , on pose

$$\Omega^k = \text{Vect}\{a_0[F, a_1] \dots [F, a_k] \mid a_0, \dots, a_k \in \mathcal{A}\} \times \{k\}.$$

Rajouter un indice  $k$  permet de faire une somme directe ; le même opérateur peut apparaître plusieurs fois, pour différentes valeurs de  $k$ , mais les relations algébriques sont préservées. Pour  $\omega \in \Omega^k$ , on définit  $d\omega = F\omega - (-1)^k \omega F$ . On étend le produit naturellement. Ici, il y a quelques points à vérifier.

En premier lieu, il faut vérifier que, pour  $\omega \in \Omega^k$  et  $\omega' \in \Omega^{k'}$ , le produit  $\omega\omega'$  est bien dans  $\Omega^{k+k'}$ . On peut supposer que  $\omega$  est de la forme  $\omega = a_0[F, a_1] \dots [F, a_k]$  et  $\omega' = b_0[F, b_1] \dots [F, b_{k'}]$ .

On constate alors qu'il suffit de traiter le cas  $\omega' \in \mathcal{A}$ . Par récurrence finie, le résultat découle de la règle de Leibniz : pour  $a, b \in \mathcal{A}$ , on a

$$[F, a]b = (da)b = d(ab) - a(db) = [F, ab] - a[F, b] \in \Omega^1.$$

On peut même écrire la formule un peu plus générale :

$$(a_0[F, a_1] \dots [F, a_k])a_{k+1} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} a_0[F, a_1] \dots [F, a_j a_j + 1] \dots [F, a_{k+1}] \\ + (-1)^k a_0 a_1 [F, a_2] \dots [F, a_{k+1}].$$

Ensuite, il faut vérifier que tout cela est cohérent avec la définition de la différentielle quantique. Il est clair qu'elle est toujours linéaire (et que la formule est aussi valide pour  $k = 0$ ). Pour  $\omega \in \Omega^k$ , vérifions que  $d\omega \in \Omega^{k+1}$ . Pour  $a \in \mathcal{A}$ , comme  $F^2 = 1$ , il vient :

$$F[F, a] = F(Fa - aF) = a - FaF = -(FaF - a) = -(Fa - aF)F = -[F, a]F.$$

On en déduit que, pour  $\omega$  de la forme  $a_0[F, a_1] \dots [F, a_k]$ , on a

$$\omega F = (a_0[F, a_1] \dots [F, a_k])F = (-1)^k a_0 F[F, a_1] \dots [F, a_k],$$

d'où on parvient aisément à  $d\omega = [F, a_0][F, a_1] \dots [F, a_k] \in \Omega^{k+1}$ .

La différentielle  $d$  est maintenant une différentielle graduée, c'est-à-dire qu'elle satisfait à la règle de Leibniz graduée :

$$d(\omega\omega') = F(\omega\omega') - (-1)^{k+k'}(\omega\omega')F \\ = (F\omega - (-1)^k\omega F)\omega' + (-1)^k\omega(F\omega' - (-1)^{k'}\omega'F) \\ = (d\omega)\omega' + (-1)^k\omega(d\omega').$$

Enfin, son carré est bien nul : on considère encore  $\omega = a_0[F, a_1] \dots [F, a_k] \in \Omega^k$ , et on a

$$d^2\omega = F(d\omega) - (-1)^{k+1}(d\omega)F \\ = F(F\omega - (-1)^k\omega F) + (-1)^k(F\omega - (-1)^k\omega F)F \\ = \omega - (-1)^k F\omega F + (-1)^k F\omega F - \omega \\ = 0.$$

On a ainsi une algèbre graduée ascendante munie d'une différentielle. Comme pour la cohomologie de de Rahm, la cohomologie cyclique de  $\mathcal{A}$  est définie par la suite de groupes  $H^k(\mathcal{A}) = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1}$ , pour  $k \geq 0$ , avec  $d_k: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$  la restriction de la différentielle à  $\Omega^k$  (pour donner un sens à  $H^0$ , on prend pour  $d_{-1}$  le morphisme trivial de 0 dans  $\mathcal{A}$ ).

Pour la lectrice ou le lecteur intéressé, l'annexe A du chapitre 3 de [6] déjà mentionné donne une construction de la cohomologie cyclique en termes de foncteurs dérivés sur une bonne catégorie, la catégorie cyclique. Le calcul différentiel quantique s'exprime très bien en termes catégoriques, ce qui lui permet d'être utilisé dans des cadres très variés (par exemple en géométrie tropicale par Connes et Consani pour s'attaquer à l'hypothèse de Riemann).

## 5.4 Calcul différentiel quantique sur $\mathbb{R}$ : préliminaires calculatoires

Cette section est une préparation à la section suivante, dont le but sera de développer et présenter un calcul différentiel quantique sur les fonctions d'une variable réelle. Afin de mener cette tâche à bien, de nombreux résultats classiques d'analyse seront nécessaires. Comme leur preuve est parfois longue et laborieuse, on ne l'inclura pas ici. L'objectif de cette section est de les énoncer précisément de façon à pouvoir s'en servir lors de la construction du calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ .

### 5.4.1 Préliminaires concernant certains opérateurs sur $L^2(\mathbb{R})$

Un outil fondamental en analyse réelle est la transformée de Fourier. On la note  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ . On rappelle sans preuve les propriétés suivantes. La transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  d'un élément  $u \in L^2(\mathbb{R})$  est donnée pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$\mathcal{F}(u)(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A u(y) e^{-2i\pi xy} dy.$$

Cette limite existe et est finie. L'opérateur  $\mathcal{F}$  est alors un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même. Il est unitaire, c'est-à-dire qu'il est inversible, d'inverse continu, et que son inverse est égal à son adjoint. Cet inverse est donné par

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A u(y) e^{2i\pi xy} dy.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on définit l'opérateur de translation  $\tau_x : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  par  $\tau_x(u)(y) = u(y - x)$ , pour  $u \in L^2(\mathbb{R})$  et  $y \in \mathbb{R}$ . C'est clairement un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même. Pour  $\lambda > 0$ , on définit l'opérateur de dilatation  $\Delta_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  par  $\Delta_\lambda(u)(x) = u(\lambda x)$ . C'est aussi un opérateur linéaire continu.

**Lemme 1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ . On note  $e_x \in L^\infty(\mathbb{R})$  la fonction définie par  $e_x(y) = e^{-2i\pi xy}$  pour  $y \in \mathbb{R}$ . Il vient :

$$\mathcal{F} \tau_x \mathcal{F}^{-1} = e_x, \quad \mathcal{F} \Delta_\lambda \mathcal{F}^{-1} = \lambda^{-1} \Delta_{\lambda^{-1}}.$$

L'élément essentiel de la construction du calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$  repose sur l'établissement de l'opérateur différentiel  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  satisfaisant  $F^2 = \text{Id}$  et  $F = F^*$ . Dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on aura  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  et  $F$  sera donné par un opérateur appelé la transformée de Hilbert, que l'on va pour l'instant noter  $H$ . On définit  $\text{sgn} \in L^\infty(\mathbb{R})$  par  $\text{sgn}(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $\text{sgn}(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $\text{sgn}(0) = 0$ . Rappelons qu'un élément de  $L^\infty(\mathbb{R})$  définit un opérateur continu sur  $L^2(\mathbb{R})$  (voir l'exemple 9). La transformée de Hilbert  $H$  est définie comme l'opérateur

$$H = \mathcal{F}^{-1} \text{sgn} \mathcal{F},$$

obtenu en appliquant successivement la transformée de Fourier, la multiplication par la fonction signe, puis la transformée de Fourier inverse. Il est clair que  $H : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est un opérateur linéaire continu et qu'il est unitaire (car  $\text{sgn}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ). Comme  $\text{sgn}^2 = \text{sgn}$ , on a  $H^2 = 1$ . La transformée de Hilbert  $H$  satisfait donc bien à  $H^2 = 1$  et  $H^* = H$ . On va maintenant donner une formule explicite de la transformée de Hilbert.

**Proposition 1.** Soit  $u \in L^2(\mathbb{R})$ . Pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$H(u)(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{s-x} ds,$$

où l'intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy, plus exactement :

$$H(u)(x) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|s-x|>\varepsilon} \frac{u(s)}{s-x} ds.$$

Cette limite existe et est finie.

On remarque que  $H$  est donné par la convolution avec la fonction  $x \mapsto \frac{1}{i\pi x}$ . La preuve est particulièrement calculatoire, la lectrice ou le lecteur est encouragé à essayer. Un conseil est de calculer d'abord  $H(u)$  pour  $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ , les fonctions de classe  $C^1$  à support compact, et d'utiliser ensuite la densité de  $C_c^1(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Il va sans dire que les bornes infinies sont à prendre en tant que limites.

#### 5.4.2 Deux théorèmes d'approximation

On aura besoin de deux théorèmes d'approximation classiques. Le premier établit la densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues périodiques pour la norme uniforme.

**Théorème 4** (Théorème de Weierstrass trigonométrique). Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue  $T$ -périodique pour un certain  $T > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe un polynôme trigonométrique  $T$ -périodique, défini par  $P(y) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{kTy}$  pour  $y \in \mathbb{R}$ , avec les  $a_k \in \mathbb{C}$ , tel que  $\|P - f\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Le théorème suivant est un théorème de théorie de la mesure. Il permet d'approximer les fonctions mesurables par des fonctions continues. Pour faire de la théorie de la mesure, on va considérer  $(X, \mu)$  un espace topologique localement compact muni de la tribu borélienne, avec  $\mu$  une mesure de Radon  $\sigma$ -finie. C'est par exemple le cas pour  $\mathbb{R}^n$  avec la mesure de Lebesgue.

**Théorème 5** (Lusin). Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable bornée à support compact. Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $g \in C_c(X)$  telle que :

- $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ ;
- $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon$ .

Les deux théorèmes précédents vont nous permettre de montrer le lemme suivant. On rappelle que  $L^\infty(\mathbb{R})$  agit sur  $L^2(\mathbb{R})$  par multiplication ponctuelle (voir exemple 9). On rappelle aussi que  $C_c(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  (voir la remarque 1; dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on peut prouver ce résultat plus directement avec le théorème de Weierstrass classique).

**Lemme 2.** Soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Il existe une suite de polynômes trigonométriques  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

- $\|P_n\|_\infty \leq 1 + \|a\|_\infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;
- pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot u = a \cdot u$  pour la norme 2.

*Démonstration.* On va approximer  $a$  en plusieurs fois. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = a \cdot 1_{[-n, n]}$ . Par le théorème 5 appliqué à  $a_n$ , il existe  $f_n \in C_c(\mathbb{R})$  telle que, en notant  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , on a :

- $\|f_n\|_\infty \leq \|a_n\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ ;
- $\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \neq a_n(x)\}) < \frac{1}{2n}$ .

Maintenant, on construit  $g_n$  de la façon suivante. Pour  $x \notin [n - \frac{1}{2n}, n]$ , on pose  $g_n(x) = f_n(x)$ . On définit ensuite  $g_n$  sur  $[n - \frac{1}{2n}, n]$  comme l'unique fonction affine telle que  $g_n(n - \frac{1}{2n}) = f_n(n - \frac{1}{2n})$  et  $g_n(n) = f_n(n)$ . On constate que  $g_n$  est continue et que  $\|g_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ . De plus, en notant  $E_n = \{x \in \mathbb{R} \mid g_n(x) \neq a_n(x)\}$ , on a

$$\begin{aligned} \lambda(E_n) &\leq \lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \neq a_n(x)\}) + \lambda([n - \frac{1}{2n}, n]) \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Par construction, on a aussi  $g_n(-n) = g_n(n)$ .

On pose enfin  $h_n(x) = g_n(x - 2kn)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  l'unique entier tel que  $x \in [-n + 2kn, n + 2kn]$ . La fonction  $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  obtenue est  $2n$ -périodique et continue (parce que  $g_n(-n) = g_n(n)$ ). De plus, elle vérifie  $\|h_n\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ .

Par le théorème 4, il existe  $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme trigonométrique  $2n$ -périodique tel que  $\|P_n - h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ . De plus, on a immédiatement  $\|P_n\|_\infty \leq 1 + \|h_n\|_\infty \leq 1 + \|a\|_\infty$ . Montrons que la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convient.

Soit  $u \in C_c(\mathbb{R})$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il vient :

$$\|P_n(u) - a(u)\|_2 \leq \|P_n(u) - h_n(u)\|_2 + \|h_n(u) - a_n(u)\|_2 + \|a_n(u) - a(u)\|_2.$$

Il suffit donc de montrer que chacun des trois termes du membre de droite tend vers 0. On prend  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Supp } u \subset [-n_0, n_0]$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $a_n(u) = a(u)$ , donc le dernier terme est nul à partir d'un certain rang. Ensuite, il vient

$$\|P_n(u) - h_n(u)\|_2 \leq \|P_n - h_n\|_\infty \|u\|_2 \leq \frac{1}{n} \|u\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Enfin, comme  $n \geq n_0$ , on a  $h_n(x) = g_n(x)$  pour  $x \in [-n_0, n_0]$ , et on obtient

$$\begin{aligned} \|h_n(u) - a_n(u)\|_2 &= \left( \int_{-n_0}^{n_0} |h_n(x) - a_n(x)|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{E_n} |g_n(x) - a_n(x)|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\lambda(E_n)} \|g_n - a_n\|_\infty \|u\|_\infty \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{n}} \|a\|_\infty \|u\|_\infty \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On en conclut que pour tout  $u \in C_c(\mathbb{R})$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(u) - a(u)\|_2 = 0$ .

Pour finir, il reste à montrer que c'est vrai sur tout  $L^2(\mathbb{R})$  et pas seulement  $C_c(\mathbb{R})$ . Soit  $u \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $C_c(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ , il existe  $v \in C_c(\mathbb{R})$  tel que  $\|u - v\|_2 \leq$

$\frac{\varepsilon}{2(1+2\|a\|_\infty)}$ . Comme  $v \in C_c(\mathbb{R})$ , par ce qui précède, on peut prendre  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $\|P_n(v) - a(v)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . En utilisant le fait que  $\|P_n\|_\infty \leq 1 + \|a\|_\infty$ , il vient :

$$\begin{aligned} \|P_n(u) - a(u)\|_2 &\leq \|P_n(u) - P_n(v)\|_2 + \|P_n(v) - a(v)\|_2 + \|a(v) - a(u)\|_2 \\ &\leq \|P_n\|_\infty \|u - v\|_2 + \frac{\varepsilon}{2} + \|a\|_\infty \|u - v\|_2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (\|P_n\|_\infty + \|a\|_\infty) \frac{\varepsilon}{2(1+2\|a\|_\infty)} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, on en conclut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(u) - a(u)\|_2 = 0$  pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , ce qui est le résultat voulu.  $\square$

### 5.4.3 Un théorème de Lebesgue

Ce théorème sera utilisé seulement pour donner une preuve suffisamment concise de la proposition 4. La lectrice ou le lecteur pourra trouver une preuve d'un résultat légèrement plus général dans [15], théorème 7.7.

**Théorème 6.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable telle que  $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$ . Alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(t) dt.$$

### 5.4.4 Opérateurs à noyau

On considère  $(X, \mu)$  et  $(Y, \nu)$  deux espaces localement compacts mesurés, avec  $\mu$  et  $\nu$  des mesures de Radon  $\sigma$ -finies non nulles (par exemple  $X$  et  $Y$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ , avec la mesure de Lebesgue). On commence par rappeler un théorème fondamental. Soit  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable pour  $\mu \times \nu$ . Pour  $x \in X$ , on note  $f_x$  la fonction définie sur  $Y$  par  $f_x(y) = f(x, y)$ , et pour  $y \in Y$ , on note  $f^y$  la fonction définie sur  $X$  par  $f^y(x) = f(x, y)$ . Par construction des mesures produit, pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$ , les fonctions  $f_x: Y \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f^y: X \rightarrow \mathbb{C}$  sont mesurables (pour  $\nu$  et  $\mu$  respectivement, avec la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$ ).

**Théorème 7 (Fubini).** Soit  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable pour  $\mu \times \nu$ . Supposons que  $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < +\infty$ . Alors pour presque tout  $x \in X$ , on a  $\int_Y |f_x| d\nu < +\infty$ , pour presque tout  $y \in Y$ , on a  $\int_X |f^y| d\mu < +\infty$ , et

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_{y \in Y} \left( \int_X f^y d\mu \right) d\nu(y) = \int_{x \in X} \left( \int_Y f_x d\nu \right) d\mu(x).$$

De plus, si  $f \geq 0$ , cette égalité est vraie même dans le cas où  $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = +\infty$ .

**Corollaire 1.** Soit  $k \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ . Alors pour presque tout  $x \in X$ , on a  $k_x \in L^2(Y, \nu)$ , pour presque tout  $y \in Y$ , on a  $k^y \in L^2(X, \mu)$ , et il vient

$$\|k\|_{2, X \times Y}^2 = \int_{x \in X} \|k_x\|_{2, Y}^2 d\mu(x) = \int_{y \in Y} \|k^y\|_{2, X}^2 d\nu(y).$$

*Démonstration.* Dire que  $k \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$  revient à dire que  $\int_{X \times Y} |k|^2 d(\mu \times \nu) < +\infty$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème 7 à  $|k|^2$ .  $\square$

On en arrive aux opérateurs à noyau.

**Lemme 3.** *On suppose que  $k \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ . Alors l'opérateur  $T: L^2(Y) \rightarrow L^2(X)$  défini par*

$$T(u)(x) = \int_Y k(x, y)u(y)dy$$

*pour  $u \in L^2(Y)$  et presque tout  $x \in X$  est bien défini, linéaire et continu, de norme  $\leq \|k\|_{2, X \times Y}$ .*

*Démonstration.* Soit  $u \in L^2(Y)$  et soit  $x \in X$ . Par le corollaire 1, on a  $k_x \in L^2(Y, \nu)$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_{y \in Y} |k(x, y)u(y)|d\nu(y) \leq \left( \int_Y |k_x|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_Y |u|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} = \|k_x\|_2 \|u\|_2 < +\infty,$$

ce qui prouve que  $T(u): X \rightarrow \mathbb{C}$  est bien défini. Par inégalité triangulaire, on en conclut aussi que

$$|T(u)(x)| \leq \|k_x\|_2 \|u\|_2.$$

Il est clair que  $T$  est linéaire. Montrons maintenant que  $T(u) \in L^2(X, \mu)$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \int_{x \in X} |T(u)(x)|^2 d\mu(x) &\leq \int_{x \in X} \|k_x\|_2^2 \|u\|_2^2 d\mu(x) \\ &= \|u\|_2^2 \int_{X \times Y} |k|^2 d(\mu \times \nu) \text{ par le corollaire 1} \\ &= \|u\|_2^2 \|k\|_{2, X \times Y}^2 \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

On en conclut que  $T(u) \in L^2(X, \mu)$  et que  $\|T(u)\|_{2, X} \leq \|k\|_{2, X \times Y} \|u\|_{2, Y}$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On dit que  $T$  est un *opérateur à noyau* et que  $k$  est son *noyau*.

Afin d'avoir affaire à l'espace de Hilbert séparable, on va supposer maintenant que  $X$  et  $Y$  sont séparables. Cela implique que les espaces  $L^2(X, \mu)$  et  $L^2(Y, \nu)$  admettent des bases de Hilbert dénombrables. Pour  $u \in L^2(X, \mu)$  et  $v \in L^2(Y, \nu)$ , on définit  $u \otimes v: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  par  $(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y)$ . Le théorème 7 et son corollaire 1 montrent en fait que  $u \otimes v \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ .

**Théorème 8.** *Soit  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  des bases de Hilbert de  $L^2(X, \mu)$  et de  $L^2(Y, \nu)$  respectivement. Alors  $(e_i \otimes f_j)_{(i, j) \in \mathbb{N}^2}$  est une base de Hilbert de  $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ .*

*Démonstration.* L'orthogonalité de la famille  $(e_i \otimes f_j)$  est une conséquence directe du théorème de Fubini. Il reste à prouver que si  $u \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$  est orthogonal à tous les  $e_i \otimes f_j$ , alors  $u = 0$ . Considérons donc un tel  $u \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ . Il suffit de montrer que  $\|u\|_{2, X \times Y} = 0$ . Soit

$i, j \in \mathbb{N}$ . On note  $T_u$  l'opérateur de noyau  $u$  (dont l'existence est justifiée par le théorème 3). En appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned}
0 &= (u, e_i \otimes f_j) \\
&= \int_{(x,y) \in X \times Y} u(x,y) \bar{e}_i(x) \bar{f}_j(y) d(\mu \times \nu)(x,y) \\
&= \int_{x \in X} \left( \int_{y \in Y} u(x,y) \bar{f}_j(y) d\nu(y) \right) \bar{e}_i(x) d\mu(x) \\
&= \int_{x \in X} T_u(\bar{f}_j)(x) \bar{e}_i(x) d\mu(x) \\
&= (T_u(\bar{f}_j), e_i).
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , comme  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une base de Hilbert de  $L^2(X, \mu)$  et que par le théorème 3 on a  $T_u(\bar{f}_j) \in L^2(X)$ , on en conclut que  $T_u(\bar{f}_j) = 0$ .

Soit  $F_j = \{x \in X \mid (u_x, f_j) \neq 0\}$ . On sait que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $F_j$  est de mesure nulle. Comme  $\mathbb{N}$  est dénombrable, on a que  $F = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$  est aussi de mesure nulle. Soit  $x \in X \setminus F$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on a  $(u_x, f_j) = 0$ . Maintenant, comme la famille  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une base de Hilbert de  $L^2(Y, \nu)$  et que par le corollaire 1 on a  $u_x \in L^2(Y, \nu)$ , on en conclut que  $u_x = 0$ . En particulier, on a  $\|u_x\|_{2,Y} = 0$  pour tout  $x \in X \setminus F$ , donc pour presque tout  $x \in X$ . Il vient :

$$0 = \int_{x \in X} \|u_x\|_{2,Y}^2 d\mu(x) = \|u\|_{2,X \times Y}^2$$

par le corollaire 1. Comme  $\|\cdot\|_{2,X \times Y}$  est une norme, on en conclut que  $u = 0$ . Ainsi, l'orthogonal de la famille  $(e_i \otimes f_j)$  est réduit à  $\{0\}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 3.** Le théorème 8 montre que  $L^2(X \times Y, \mu \times \nu) \simeq L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \nu)$ , où le produit tensoriel est au sens de produit tensoriel d'espaces de Hilbert (i.e. la complétion du produit tensoriel en tant qu'espaces vectoriels pour la métrique issue du produit hilbertien défini par  $(x \otimes x', y \otimes y') = (x, x')(y, y')$ ).

**Théorème 9.** Soit  $T : L^2(Y, \nu) \rightarrow L^2(X, \mu)$  un opérateur à noyau, de noyau  $k \in L^2(X \times Y)$ . Supposons que  $T = 0$  en tant qu'opérateur. Alors pour presque tout  $(x, y) \in X \times Y$  pour la mesure  $\mu \times \nu$ , on a  $k(x, y) = 0$ .

*Démonstration.* C'est en fait implicitement prouvé dans la preuve du théorème 8. Soit  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  des bases de Hilbert de  $L^2(X, \mu)$  et de  $L^2(Y, \nu)$  respectivement. Par le théorème 8, la famille  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  est une base de Hilbert de  $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ . Pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , il vient :

$$\begin{aligned}
(k, e_i \otimes f_j)_{X \times Y} &= \int_{(x,y) \in X \times Y} k(x,y) \bar{e}_i(x) \bar{f}_j(y) d(\mu \times \nu)(x,y) \\
&= \int_{x \in X} T(\bar{f}_j)(x) \bar{e}_i(x) d\mu(x) \text{ par le théorème de Fubini} \\
&= (T(\bar{f}_j), e_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car  $T = 0$ . On en conclut que  $k = 0 \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$  donc  $k = 0$  presque partout sur  $X \times Y$  pour  $\mu \times \nu$ .  $\square$

On utilisera un dernier lemme bien utile.

**Lemme 4.** Soit  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable telle que  $f = 0$  presque partout pour  $\mu \times \nu$ . Alors il existe  $x \in X$  tel que  $f_x = 0$  presque partout pour  $\nu$ , et c'est en fait vrai pour presque tout  $x \in X$  pour  $\mu$ .

*Démonstration.* Soit  $E = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x, y) \neq 0\}$ . Soit  $\phi = 1_E$  l'indicatrice de  $E$  (remarquons que  $E$  est mesurable car  $f$  l'est). Par hypothèse, on a

$$\int_{X \times Y} \phi d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(E) = 0.$$

Comme  $\phi \geq 0$ , on peut appliquer le théorème 7, et il vient :

$$0 = \int_{X \times Y} \phi d(\mu \times \nu) = \int_{x \in X} \left( \int_Y \phi_x d\nu \right) d\mu.$$

Ceci montre que la fonction positive  $x \mapsto \int_Y \phi_x d\nu$  est d'intégrale nulle. On en conclut qu'elle est nulle presque partout pour  $\mu$  sur  $X$ . Donc pour presque tout  $x \in X$  pour  $\mu$ , on a :

$$0 = \int_Y \phi_x d\nu = \nu(\{y \in Y \mid f(x, y) \neq 0\})$$

ce qui implique que  $f_x$  est nulle pour presque tout  $y \in Y$  pour  $\nu$ . Si de plus on a  $\mu(X) > 0$  (ce qui est toujours le cas en pratique), il existe  $x \in X$  tel que  $f_x = 0$  presque partout sur  $Y$  pour  $\nu$ .  $\square$

## 5.5 Calcul différentiel quantique sur $\mathbb{R}$

Dans cette section, on va construire un calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ . Ce cas particulier est aussi le plus élémentaire, en ce sens qu'il pourra être rapproché et comparé au calcul différentiel classique, initialement développé pour les fonctions différentiables sur  $\mathbb{R}$ . Un phénomène assez intéressant va se produire : si l'on demande à ce que le calcul obtenu commute avec les translations et dilatations (ce qui sera motivé par comparaison avec le cas classique), il y a unicité du calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ .

### 5.5.1 Dictionnaire pour la droite réelle

On cherche à étudier un cas simple : les fonctions d'une variable réelle. Comme on veut un espace de Hilbert, un espace naturel est l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  (voir l'exemple 3). Les fonctions d'une variable réelle agissent naturellement de façon linéaire sur  $L^2(\mathbb{R})$  : sous réserve que l'image soit de carré intégrable, on identifie une fonction mesurable  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à l'opérateur

$$u \mapsto (s \mapsto f(s).u(s)).$$

Maintenant, on souhaite que  $f.g$  soit aussi de carré intégrable et que l'action soit continue, autrement dit, on souhaite que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  corresponde à un opérateur borné. Une condition suffisante est que  $f$  soit essentiellement bornée, i.e. corresponde à un élément de l'algèbre  $L^\infty(\mathbb{R})$  (voir l'exemple 9). On verra plus tard (corollaire 2) que cette condition est en fait nécessaire. Dans le reste de cette section, on va développer un calcul différentiel quantique sur l'algèbre involutive  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Les différents acteurs sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Espace de Hilbert	$\mathcal{H}$	$L^2(\mathbb{R})$
Algèbre involutive	$\mathcal{A}$	$L^\infty(\mathbb{R})$
Différentielle quantique	$F$	$F(u)(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{x-t} dt$
Différentielle de $a \in \mathcal{A}$	$da = [F, a]$	$da(u)(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)-a(y)}{x-y} u(y) dy$
Noyau de la différentielle	$H^0(\mathcal{A})$	$\mathbb{R}$
Différentielles de rang 1	$\text{Rg}(da) = 1$	$a(x) = \frac{ux+v}{wx+z}$ non affine avec $\frac{-z}{w} \notin \mathbb{R}$

### 5.5.2 L'algèbre $L^\infty(\mathbb{R})$

On note  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'algèbre des endomorphismes continus de  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour  $S \subset \mathcal{M}$ , on définit son commutant  $S'$  par  $S' = \{a \in \mathcal{M} \mid \forall s \in S, as = sa\}$ . Voici maintenant le théorème fondamental concernant l'algèbre  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Théorème 10.** *L'algèbre  $L^\infty(\mathbb{R})$  est égale à son commutant au sein de  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ .*

*Démonstration.* Notons  $A = L^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $T \in A'$ . Commençons par une remarque assez élémentaire. L'opérateur identité correspond à la multiplication par la fonction constante  $1 \in A$ . Si  $\mathbb{R}$  était de mesure finie, on aurait aussi  $1 \in L^2(\mathbb{R})$ , et, pour  $u \in A$ , on aurait :

$$T(u) = T(1.u) = u.T(1)$$

puisque  $T \in A'$ . Par densité de  $L^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on aurait que  $T(u) = T(1).u$  pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$ . Sous réserve que  $T(1) \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on aurait le résultat voulu. Plutôt que d'essayer de changer la mesure, on va ici présenter une preuve utilisant, non pas la fonction 1 directement, mais une suite approchée l'approchant.

Posons  $u_n = 1_{[-n,n]}$  pour  $n \geq 0$ . Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\|u_n\|_\infty = 1$  et  $\|u_n\|_2 = \sqrt{2n}$ . Cela implique  $u_n \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Maintenant, on peut appliquer l'opérateur  $T$ , et on pose  $f_n = T(u_n) \in L^2(\mathbb{R})$ . Montrons que l'on a  $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ . On va en fait montrer que  $\|f_n\|_\infty \leq \|T\|$ , avec  $\|T\|$  la norme d'opérateur.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$ . On pose  $C = \|T\| + \varepsilon$ . Considérons  $E \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble mesurable de mesure finie tel que  $f_n(x) > C$  pour tout  $x \in E$  (remarquons que  $E$  peut être vide). Définissons maintenant  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $g(x) = 0$  pour  $x \notin E$  et  $g(x) = \frac{1}{f_n(x)}$  pour  $x \in E$ . On obtient  $gf_n = 1_E$ , et  $\|g\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}$ , donc  $g \in A$ . En notant  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \|1_E\|_2^2 = \|gf_n\|_2^2 = \|gT(u_n)\|_2^2 = \|T(gu_n)\|_2^2 \\ &\leq \|T\|^2 \left( \int_{\mathbb{R}} |gu_n|^2 d\lambda \right) \text{ par continuité de } T \\ &\leq \|T\|^2 \left( \int_E |g|^2 d\lambda \right) \text{ car } |u_n| \leq 1 \text{ et } g \text{ est nulle en dehors de } E \\ &\leq \|T\|^2 \|g\|_\infty^2 \lambda(E). \end{aligned}$$

Par construction, on a :

$$\|g\|_\infty^2 \leq \frac{1}{C} = \frac{1}{\|T\| + \varepsilon} < \frac{1}{\|T\|}$$

et donc  $\|T\|^2 \|g\|_\infty^2 < 1$ . Puisque l'on vient de montrer que  $\lambda(E) \leq \|T\|^2 \|g\|_\infty^2 \lambda(E)$ , on obtient  $\lambda(E) = 0$ . Cela implique  $\|f_n\|_\infty \leq C = \|T\| + \varepsilon$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en conclut que  $\|f_n\| \leq \|T\|$ . Remarquons que cette borne ne dépende pas de  $n$ .

Maintenant, on va construire une fonction  $f$  appropriée. Si l'on a  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m \leq n$ , il vient immédiatement  $u_m u_n = u_n$ . Comme on a pris  $T \in A'$ , on peut écrire

$$u_n f_m = u_n T(u_m) = T(u_n u_m) = T(u_n) = f_n.$$

Ainsi, pour presque tout  $x \in [-n, n]$ , on a  $f_m(x) = f_n(x)$ , et pour presque tout  $x \notin [-n, n]$ , on a  $f_n(x) = 0$ . On en conclut que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $n \mapsto f_n(x)$  stationne dès lors que  $n \geq x$ . On pose alors  $f(x)$  cette valeur (elle vaut en fait  $f_n(x)$  pour tout  $n \geq x$ ).

La fonction  $f$  ainsi obtenue satisfait de bonnes propriétés. Déjà, on a  $|f_n(x)| \leq \|T\|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc  $|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq \|T\|$ . Cela montre que  $\|f\|_\infty \leq \|T\|$  et donc  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Ensuite, soit  $a \in C_c(\mathbb{R})$  une fonction continue à support compact. On a en particulier  $a \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a$  soit nulle en dehors de  $[-n, n]$ . Maintenant, pour presque tout  $x \in [-n, n]$ , on a  $f(x) = f_n(x)$ , donc  $f(x)a(x) = f_n(x)a(x)$ . Comme  $a$  est nulle en dehors de  $[-n, n]$ , on en conclut que  $af = af_n$  presque partout. En utilisant le fait que  $a = au_n$  et que  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ , il vient :

$$T(a) = T(au_n) = aT(u_n) = af_n = af.$$

Cela montre que l'opérateur  $T$  coïncide avec l'opérateur de multiplication par  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  sur  $C_c(\mathbb{R})$ . Or, les opérateurs  $f$  et  $T$  sont continus sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Comme  $C_c(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  et que ce sont des espaces séparés,  $T$  est égal à l'opérateur de multiplication par  $f$  sur tout  $L^2(\mathbb{R})$ . On en conclut que  $T \in L^\infty(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Corollaire 2.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose que l'action linéaire de  $f$  sur  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  définie par  $(f.u)(x) = f(x)u(x)$  envoie  $L^2(\mathbb{R})$  sur lui-même et  $y$  définit une action linéaire continue. Alors  $f$  est mesurable et  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Déjà, le fait que  $f$  définit une action sur  $L^2(\mathbb{R})$  implique que  $f$  est mesurable. En effet, en notant  $u_n = 1_{[-n, n]} \in L^2(\mathbb{R})$ , on a par hypothèse  $f.u_n = f|_{[-n, n]}$  mesurable, donc  $f$  est mesurable.

Maintenant, on suppose que l'action définie par  $f$  est continue. Soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $u \in L^2(\mathbb{R})$ . Pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$(fa)(u)(x) = f(x)a(x)u(x) = a(x)f(x)u(x) = (af)(u)(x).$$

On en conclut que les opérateurs définis par  $f$  et  $a$  commutent au sein de  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ . Ceci étant vrai pour tout  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on en conclut que  $f \in L^\infty(\mathbb{R})' = L^\infty(\mathbb{R})$  par le théorème 10. Ainsi, on a  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ .  $\square$

### 5.5.3 La transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert est un opérateur essentiel en théorie du signal et bien connu des analystes. Elle est définie par  $H = \mathcal{F}^{-1} \text{sgn} \mathcal{F}$ . On rappelle que c'est alors un opérateur unitaire qui satisfait à  $H^2 = 1$  et  $H^* = H$ . Ce qui va nous intéresser est sa relation avec les opérateurs de translation et de dilatation.

**Proposition 2.** *La transformée de Hilbert commute avec les opérateurs de translation et de dilatation. Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $\lambda > 0$ , on a  $H\tau_x = \tau_x H$  et  $H\Delta_\lambda = \Delta_\lambda H$ .*

*Démonstration.* On a  $H = \mathcal{F}^{-1} \text{sgn} \mathcal{F}$ . Par le lemme 1, on a  $\tau_x = \mathcal{F}^{-1} e_x \mathcal{F}$ . Comme  $e_x, \text{sgn} \in L^\infty(\mathbb{R})$  et que  $L^\infty(\mathbb{R})$  est une algèbre commutative, on en conclut que  $e_x \text{sgn} = \text{sgn} e_x$ . En conjuguant par  $\mathcal{F}^{-1}$ , on obtient  $\tau_x H = H\tau_x$ , qui est le résultat voulu.

Par la même proposition 1, on a aussi  $\Delta_\lambda = \lambda^{-1} \mathcal{F}^{-1} \Delta_{\lambda^{-1}} \mathcal{F}$ . Comme tous les opérateurs sont linéaires, pour que  $\Delta_\lambda$  commute avec  $H$ , en conjuguant par  $\mathcal{F}^{-1}$ , on trouve qu'il suffit de vérifier que  $\text{sgn}$  commute avec  $\Delta_{\lambda^{-1}}$ . Puisque  $\lambda^{-1} > 0$ , on a  $\text{sgn}(\lambda^{-1}x) = \text{sgn}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Cela conclut la preuve.  $\square$

### 5.5.4 Différentielle classique

Ce paragraphe discute l'invariance par translations et dilatations du calcul différentiel classique. En imposant ces conditions au calcul différentiel quantique, on obtiendra son unicité au paragraphe suivant.

Remarquons que, pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ , les opérateurs  $\tau_a$  et  $\Delta_\lambda$  préservent la différentiabilité : ainsi, on obtient des opérateurs linéaires  $\tau_a : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$  et  $\Delta_\lambda : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ . Maintenant, fixons  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . En notant  $df$  la différentielle de  $f$ , pour  $x, h \in \mathbb{R}$ , on a  $df_x(h) = f'(x)h$ , ce que l'on note classiquement

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Ici, la notation  $dx$  représente la différentielle de la fonction  $x \mapsto x$ , qui correspond à l'identité. En utilisant ces notations classiques (même si légèrement abusives), on a  $d(x-a) = dx$  et  $d(\lambda x) = \lambda dx$ , ce que l'on peut écrire

$$\tau_a(dx) = dx, \quad \Delta_\lambda(dx) = \lambda dx.$$

On énonce alors le résultat principal sous forme de lemme.

**Lemme 5.** *Soit  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ , on a*

$$d(\tau_a(f)) = \tau_a(df), \quad d(\Delta_\lambda(f)) = \Delta_\lambda(df).$$

*Démonstration.* Soit  $y \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} d(\tau_a(f))_y &= \tau_a(f)'(y)dx = f'(y-a)dx \\ &= \tau_a(f')(y)\tau_a(dx) = \tau_a(f'dx)_y \\ &= \tau_a(df)_y, \end{aligned}$$

où l'on utilise la convention  $\tau_a(f'dx) = \tau_a(f')\tau_a(dx)$ . Ensuite, on a aussi :

$$\begin{aligned} d(\Delta_\lambda(f))_y &= \Delta_\lambda(f)'(y)dx = \lambda f'(\lambda y)dx \\ &= f'(\lambda y)(\lambda dx) = \Delta_\lambda(f')(y)\Delta_\lambda(dx) \\ &= \Delta_\lambda(f'dx)_y = \Delta_\lambda(df)_y. \end{aligned}$$

□

À vrai dire, dans le paragraphe précédent, le sens exact des notations n'a pas été totalement explicite : il pourrait l'être (c'est un excellent exercice de formalisme différentiel, laissé à la lectrice ou au lecteur intéressé), mais on l'a évité par faute de place. En effet, il n'est pas très intéressant dans notre contexte : notre vrai but était d'arriver au lemme 5, qui permet d'écrire les relations de commutativité

$$d\tau_a(f) = \tau_a df, \quad d\Delta_\lambda(f) = \Delta_\lambda df. \quad (2)$$

Ce sont ces relations qui vont servir de point de départ à l'établissement du calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ .

### 5.5.5 Différentielle quantique sur $\mathbb{R}$

Replaçons-nous dans le cadre quantique, sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , muni de l'action de  $L^\infty(\mathbb{R})$  par multiplication ponctuelle. Notre objectif est de trouver notre opérateur différentiel  $F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  satisfaisant  $F^* = F$  et  $F^2 = 1$ . La différentielle de  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  sera alors l'opérateur  $df = [F, f]$ .

Voici le chemin que l'on va parcourir au cours de ce paragraphe. Motivés par l'équation (2), on commence par demander à ce que  $d\tau_x = \tau_x d$  et  $d\Delta_\lambda = \Delta_\lambda d$ . Par le lemme 6, on obtient que l'opérateur différentiel quantique  $F$  commute avec les translations et les dilatations. Comme  $F$  commute avec les translations, par le théorème 11, il existe  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $F = \mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}$ . Comme  $F$  commute avec les dilatations, par la proposition 4, on a  $m$  constante presque partout sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$ . Comme enfin on demande à ce que  $F^2 = 1$  (en tant que différentielle quantique), on trouve que  $m^2 = 1$  (en tant qu'opérateur et en tant que fonction, puisque la composition des opérateurs correspond au produit des fonctions), ce qui donne les quatre possibilités  $m \in \{1, -1, \text{sgn}, -\text{sgn}\}$ . Les deux premiers cas sont triviaux (on a  $da = 0$  pour tout  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ ) et les deux derniers sont opposés. Comme toutes les opérations sont linéaires, on peut choisir  $m = \text{sgn}$ . On a donc  $F = \mathcal{F}^{-1}\text{sgn}\mathcal{F}$ , qui est la transformée de Hilbert.

Le lemme suivant montre que si la différentielle quantique commute avec les opérateurs de translations et de dilatations, alors  $F$  aussi.

**Lemme 6.** Soit  $F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  un opérateur linéaire continu, soit  $x \in \mathbb{R}$  et soit  $\lambda > 0$ . On suppose que pour tout  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on a (le produit étant la composition des opérateurs) :

$$\begin{aligned} [F, \tau_x f] &= \tau_x [F, f], \\ [F, \Delta_\lambda f] &= \Delta_\lambda [F, f]. \end{aligned}$$

Alors on a  $[F, \tau_x] = 0 = [F, \Delta_\lambda]$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, pour tout  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on a

$$F(\tau_x f) - (\tau_x f)F = \tau_x(Ff - fF) = \tau_x Ff - \tau_x fF.$$

En simplifiant, on obtient  $F\tau_x f = \tau_x Ff$  pour tout  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ . En particulier, comme  $1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on obtient  $F\tau_x = \tau_x F$ , d'où le résultat. De la même manière, on trouve  $F\Delta_\lambda = \Delta_\lambda F$ . □

En résumant, puisque l'on veut un calcul différentiel invariant par translations et dilatations, comme dans le cas classique, on demande à ce que la différentielle satisfasse à l'équation (2). Le

lemme 6 nous dit alors que l'opérateur  $F$  doit commuter avec tous les opérateurs de translation  $\tau_x$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et tous les opérateurs de dilatation  $\Delta_\lambda$  pour  $\lambda > 0$ .

C'est maintenant que la topologie va entrer en jeu. Le lemme suivant est le premier pas vers l'identification de l'opérateur  $F$ . Rappelons que l'on note  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  la transformée de Fourier et que c'est un opérateur unitaire.

**Proposition 3.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ , soit  $F \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$  et soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Supposons que :

1. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $Fa_n = a_n F$  ;
2. pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot u = a \cdot u$  pour la norme 2.

Alors  $Fa = aF$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in L^2(\mathbb{R})$ . Il vient :

$$\begin{aligned} F(au) &= F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n u\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n u) \text{ par continuité de } F \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n F(u) \text{ par hypothèse} \\ &= aF(u). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , on en conclut que les opérateurs  $F$  et  $a$  commutent.  $\square$

On en vient maintenant au point clé de l'identification de l'opérateur différentiel quantique  $F$ .

**Théorème 11.** Soit  $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  un opérateur linéaire borné. Supposons que  $F$  commute avec tous les opérateurs  $\tau_x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Alors il existe  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $F = \mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $H = \mathcal{F}F\mathcal{F}^{-1}$  commute avec  $L^\infty(\mathbb{R})$ . En effet, dans ce cas, par le théorème 10, on a  $H \in L^\infty(\mathbb{R})$ , ce qui signifie exactement qu'il existe  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $F = \mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}$ . Pour cela, d'après le lemme 2 et la proposition 3, il suffit de montrer que  $H$  commute avec tous les polynômes trigonométriques. Mais les polynômes trigonométriques sont exactement les combinaisons linéaires des fonctions  $e_x \in L^\infty(\mathbb{R})$  avec  $x \in \mathbb{R}$ , où  $e_x(y) = e^{-2i\pi xy}$ . Il suffit donc de montrer que  $H$  commute avec tous les  $e_x$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse, on a  $F\tau_x = \tau_x F$ . En conjuguant par  $\mathcal{F}$ , on obtient  $H(\mathcal{F}\tau_x\mathcal{F}^{-1}) = (\mathcal{F}\tau_x\mathcal{F}^{-1})H$ . Maintenant, par le lemme 1, on a  $\mathcal{F}\tau_x\mathcal{F}^{-1} = e_x$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Un opérateur linéaire continu  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est appelé un *multiplieur de Fourier* s'il existe  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $T = \mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}$ . Le théorème 11 énonce donc qu'un opérateur qui commute avec les translations est un multiplieur de Fourier. La réciproque étant immédiate, on a en fait calculé le commutant  $\{\tau_x \mid x \in \mathbb{R}\}'$  : c'est l'ensemble des multiplieurs de Fourier. Déterminons maintenant une expression de  $F$  en utilisant le fait que  $F$  commute aussi avec les dilatations.

**Proposition 4.** Soit  $m \in L^\infty(\mathbb{R})$  telle que le multiplieur de Fourier  $H = \mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}$  commute avec les dilatations. Alors  $m$  est presque partout constante sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, on a  $H\Delta_\lambda = \Delta_\lambda H$ . En conjuguant par  $\mathcal{F}$ , par le lemme 1, on obtient  $m\lambda^{-1}\Delta_{\lambda^{-1}} = \lambda^{-1}\Delta_{\lambda^{-1}}m$ . Comme tous les opérateurs sont linéaires, en simplifiant par  $\lambda^{-1}$ , on trouve  $m\Delta_{\lambda^{-1}} = \Delta_{\lambda^{-1}}m$ .

Pour  $\lambda > 0$  et  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a donc

$$m(x)u(\lambda x) = m.\Delta_\lambda(u)(x) = \Delta_\lambda(m.u)(x) = (m.u)(\lambda x) = m(\lambda x)u(\lambda x).$$

En considérant la suite dénombrable  $u_n = 1_{[-n,n]} \in L^2(\mathbb{R})$ , on en conclut que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $m(x) = m(\lambda x)$ .

Posons

$$M(x) = \int_0^x m(t)dt$$

pour  $x > 0$ . Cette définition est valide puisque  $m$  est bornée, donc l'intégrale correspondante est finie (on a immédiatement  $|M(x)| \leq \|m\|_\infty x$ ). Maintenant, fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^x m(t)dt \\ &= x \int_0^1 m(xs)ds \text{ (avec le changement de variable } t = xs) \\ &= x \int_0^1 m(s)ds \text{ puisque } m(xs) = m(s) \text{ pour presque tout } s \in \mathbb{R} \\ &= xM(1). \end{aligned}$$

On en conclut que  $M$  est une fonction linéaire sur  $]0, +\infty[$ , de coefficient directeur  $M(1)$ . Par le théorème 6, on obtient que pour presque tout  $x > 0$ , on a

$$m(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}(M(x + \varepsilon) - M(x)) = M(1).$$

Ainsi,  $m$  est presque partout égale à  $M(1)$  sur  $]0, +\infty[$ . En appliquant le même raisonnement à  $x \mapsto m(-x)$ , on en conclut que  $m$  est aussi presque partout égale à une constante sur  $] -\infty, 0[$ .  $\square$

Maintenant, comme on souhaite que  $F^2 = \text{Id}$ , on a  $m(x)^2 = 1$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, avec la proposition 4, on en conclut que  $m \in \{-1, 1, \text{sgn}, -\text{sgn}\}$ . Comme mentionné au début de ce paragraphe, on peut choisir  $m = \text{sgn}$ . On obtient alors que  $F = \mathcal{F}^{-1}\text{sgn}\mathcal{F}$ , qui est la transformée de Hilbert. Il est alors immédiat que  $F^* = F$  et  $F^2 = 1$  donc la transformée de Hilbert satisfait aux conditions pour être une différentielle quantique. De plus, par la proposition 2, elle commute bien avec les translations et les dilatations. On en conclut qu'au signe près, le seul opérateur différentiel quantique non trivial  $F: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  qui commute avec les translations et les dilatations est la transformée de Hilbert. On a donc complété notre triplet spectral  $(L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R}), F)$ , avec  $F$  la transformée de Hilbert.

### 5.5.6 Différentielle d'un opérateur

Intéressons-nous maintenant à l'expression de la différentielle d'un élément  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Rappelons que  $da$  est alors l'opérateur  $[F, a]$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ . En se servant de l'expression explicite de

la transformée de Hilbert donnée par la proposition 1, il vient, pour  $u \in L^2(\mathbb{R})$  et presque tout  $x \in \mathbb{R}$  (rappelons que les intégrales, à prendre au sens de la valeur principale, sont bien définies) :

$$\begin{aligned} da(u)(x) &= [F, a](u)(x) \\ &= (Fa - aF)(u)(x) \\ &= F(au)(x) - a(Fu)(x) \\ &= \frac{1}{i\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(y)u(y)}{y-x} dy - a(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y)}{y-x} dy \right) \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(y) - a(x)}{y-x} u(y) dy. \end{aligned}$$

On constate ainsi que la différentielle de  $a$  est un opérateur à noyau représenté par le noyau  $(x, y) \mapsto \frac{1}{i\pi} \frac{a(x) - a(y)}{x-y}$ .

### 5.5.7 Calcul de $H^0(\mathcal{A})$

Cherchons quelques propriétés élémentaires de ce calcul différentiel. Comme pour tout calcul différentiel, la dérivée d'une constante est nulle : c'est immédiat par linéarité de  $F$ . Qu'en est-il de la réciproque ? Autrement dit, en termes algébriques, peut-on calculer le premier groupe  $H^0(\mathcal{A}) = \text{Ker } d$  de la cohomologie cyclique de ce triplet spectral ?

Grâce au paragraphe 5.4.4, on a assez de matériel pour calculer  $H^0(L^\infty(\mathbb{R}))$ .

**Théorème 12.** *Soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $da = 0$ . Alors  $a$  est presque partout égale à une fonction constante.*

*Démonstration.* On définit  $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  par  $k(x, y) = \frac{1}{i\pi} \frac{a(x) - a(y)}{x-y}$  pour  $x \neq y$  et  $k(x, x) = 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Remarquons que ce deuxième cas n'est pas important car la diagonale  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  est de mesure nulle. On va montrer que  $k$  est nul presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  avec  $a < b < c < d$ . On a  $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$  donc  $[a, b] \times [c, d] \cap \Delta = \emptyset$ . En notant  $r = k|_{[a, b] \times [c, d]}$ , on obtient  $r: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable bornée, puisque produit de la fonction bornée  $(x, y) \mapsto a(x) - a(y)$  avec la fonction continue  $(x, y) \mapsto \frac{1}{i\pi(x-y)}$  (et donc bornée puisque  $[a, b] \times [c, d]$  est compact). Alors, on a  $r \in L^2([a, b] \times [c, d])$  muni de la mesure de Lebesgue (on rappelle que la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  est produit de deux mesures de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ). Par le théorème 8,  $r$  définit donc un opérateur à noyau  $T_r: L^2([c, d]) \rightarrow L^2([a, b])$  linéaire continu. De plus, pour  $u \in L^2([c, d])$ , en prolongeant  $u$  à  $\mathbb{R}$  tout entier par 0, on obtient  $v \in L^2(\mathbb{R})$ , avec  $v|_{[c, d]} = u$ . La section 5.5.6 fournit alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (da)(v) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x) - a(y)}{x-y} v(y) dy \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_c^d \frac{a(x) - a(y)}{x-y} u(y) dy \\ &= \int_c^d r(x, y) u(y) dy. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'opérateur  $T_r$  est nul. Par le théorème 9, on en conclut que  $r = 0$  presque partout, et donc  $k = 0$  presque partout sur  $[a, b] \times [c, d]$  pour la mesure de Lebesgue. Comme on

peut recouvrir  $J^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$  par une quantité dénombrable de pavés de la forme  $[a, b] \times [c, d]$ , on en conclut que  $k$  est nul presque partout sur  $J^+$ . Comme  $k(x, y) = k(y, x)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on en conclut que  $k$  est nul presque partout sur  $J^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$ . Enfin, en observant que  $\mathbb{R}^2 = J^+ \sqcup J^- \sqcup \Delta$  et que  $\Delta$  est de mesure de Lebesgue nulle, on en conclut que  $k$  est nul presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ .

Par le lemme 4, il existe alors  $x \in \mathbb{R}$  tel que pour presque tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a

$$0 = k(x, y) = \frac{1}{i\pi} \frac{a(x) - a(y)}{x - y}.$$

Cela signifie que pour presque tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $a(y) = a(x)$ , i.e.  $a$  est presque partout égale à une fonction constante.  $\square$

Comme dans le cas classique, on trouve que pour le calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ , les seules fonctions de différentielle nulle sont les constantes. De façon algébrique, cela permet d'écrire  $H^0(L^\infty(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$ .

**Remarque 4.** La preuve du théorème 12 consiste en fait à montrer qu'un opérateur nul de noyau  $k \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$  a son noyau nul presque partout. En effet, en se restreignant à un rectangle compact  $[a, b] \times [c, d]$ , on a alors un vraiment un noyau qui est élément de  $L^2([a, b] \times [c, d])$ . Le théorème 9 montre que le noyau est donc nul presque partout sur  $[a, b] \times [c, d]$ . On recouvre ensuite  $\mathbb{R}^2$  par un nombre dénombrable de tels compacts pour conclure que le noyau est en fait nul presque partout.

### 5.5.8 Opérateurs de différentielle de rang 1

Ce paragraphe est motivé par un joli exercice, qui consiste à étudier les fonctions qui satisfont à l'équation

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = u(x)v(y), \quad (3)$$

pour  $x, y \in \mathbb{C}$  avec  $x \neq y$ . Cet exercice est intimement relié au calcul différentiel quantique sur  $\mathbb{R}$ . En effet, au paragraphe 5.5.7, on a déterminé les opérateurs  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  dont la différentielle quantique est nulle. La résolution de l'équation (3) permettra de déterminer une autre classe d'opérateurs dont la différentielle quantique est très petite : les opérateurs dont la différentielle est de rang 1.

La résolution que l'on va présenter fait intervenir des objets qui appartiennent au monde de la géométrie projective. Ces objets sont le birapport et les homographies. Ils ont des propriétés fascinantes qui vont permettre une résolution élégante de l'équation (3). Cependant, ces propriétés forment un sujet à part entière ; comme ce n'est pas le nôtre, on va seulement présenter celles que nous utiliserons. La lectrice ou le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [11], chapitre 3.

Avant de rentrer dans les définitions, voici l'idée directrice de la preuve. Supposons que  $f, u$  et  $v$  satisfont à l'équation 3 pour tout couple  $(x, y) \in J$ , avec  $J \subset \mathbb{C}$ . Alors il est immédiat que  $f$  préserve le birapport. Maintenant, il est bien connu des géomètres que les seules fonctions qui préservent le birapport sont les homographies, i.e. les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ . La difficulté essentielle de ce paragraphe réside dans le fait que pour relier cette équation aux opérateurs, il va falloir travailler à ensemble de mesure nulle près. En particulier, le raisonnement précédent ne peut pas s'appliquer à la lettre. Au lieu d'un tel ensemble  $J$  sur lequel  $f$  vérifie

l'équation 3, on utilisera le lemme 9 pour obtenir une famille d'ensembles  $(J_x)_{x \in J}$  avec de suffisamment bonnes propriétés. C'est le théorème 13 qui présentera la résolution générale faisant le lien avec les opérateurs dont la différentielle est de rang 1. Pour la version algébrique, elle sera l'objet du corollaire 3.

Pour simplifier les calculs, on va utiliser le plan complexe complété  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\omega\}$ . Dans notre contexte minimaliste,  $\omega$  est simplement le symbole d'un élément qui n'est pas dans  $\mathbb{C}$  (en particulier, on n'utilisera pas de structure de compactifié d'Alexandroff, ni de droite projective complexe, ni de sphère de Riemann sur  $\widehat{\mathbb{C}}$ , même si le point  $\omega$  peut bien s'identifier à un point à l'infini). On n'aura pas besoin d'autre structure pour définir les homographies, le birapport, et les appliquer à la résolution de l'équation (3). Pour  $x, y, z, t \in \mathbb{C}$  deux-à-deux distincts, on définit leur *birapport* comme la quantité

$$[x, y, z, t] = \frac{(x-z)(y-t)}{(x-t)(y-z)}.$$

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , on définit l'*homographie*  $h_A: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  associée à  $A$  par  $h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  quand  $cz+d \neq 0$ . Si  $c = 0$ , on pose  $h_A(\omega) = \omega$ . Si  $c \neq 0$ , on pose  $h_A(\frac{-d}{c}) = \omega$  et  $h_A(\omega) = \frac{a}{c}$ . Il est facile de vérifier que ces définitions sont valides. En particulier, comme  $\det(A) \neq 0$ , on a  $z \mapsto cz+d$  qui n'est pas identiquement nulle, et donc la fonction  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  est définie et continue au moins sur  $\mathbb{C}$  privé d'un point. On peut alors penser à  $\omega$  comme étant un point à l'infini. Dans cette optique, une homographie est le quotient de deux fonctions affines non nulles et non multiples l'une de l'autre. Lorsque le dénominateur s'annule, la variable est envoyée sur le point à l'infini.

Remarquons aussi que pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , on a  $h_{\lambda A} = h_A$ . Cela permettra de supposer si nécessaire que  $\det(A) = 1$ , et relativise l'emploi de l'article défini : en effet, des matrices multiples donnent la même homographie. On peut en fait montrer que c'est la seule obstruction : si  $h_A = h_B$ , alors  $A$  et  $B$  sont multiples l'une de l'autre, mais ce ne sera pas nécessaire pour la suite. Le lemme classique suivant sera, lui, très utile, la preuve est laissée à la lectrice ou au lecteur intéressé (elle ne présente pas de difficultés).

**Lemme 7.** Soit  $A, B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ . On note  $h_A$  et  $h_B$  les homographies respectivement associées. Il vient :

$$h_A \circ h_B = h_{AB}$$

et l'homographie  $h_A: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  est une bijection d'inverse  $h_{A^{-1}}$ .

On dit alors que le point  $h_{A^{-1}}(\omega)$  est le *pôle* de l'homographie  $h_A$ .

Établissons maintenant un premier lien entre homographies et birapport.

**Lemme 8.** Soit  $a, b, c \in \mathbb{C}$  deux-à-deux distincts. Notons  $A = \begin{pmatrix} (c-a) & b(a-c) \\ (c-b) & a(b-c) \end{pmatrix}$ . Alors, on a  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , et, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c\}$ , il vient :

$$h_A(z) = [a, b, c, z].$$

*Démonstration.* Montrons que  $\det(A) \neq 0$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\det(A) &= (c-a)a(b-c) - (c-b)b(a-c) \\ &= (c-a)(a(b-c) + b(c-b)) \\ &= (c-a)(b-c)(a-b) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

puisque  $a, b$  et  $c$  sont deux-à-deux distincts. On en conclut que l'on a bien  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ .

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c\}$ . On écrit :

$$\begin{aligned}[a, b, c, z] &= \frac{(a-c)(b-z)}{(a-z)(b-c)} \\ &= \frac{(c-a)z + b(a-c)}{(c-b)z + a(b-c)} \\ &= h_A(z),\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On en vient maintenant au résultat fondamental. On va l'établir pour des fonctions définies seulement sur une partie  $J \subset \mathbb{C}$  parce que cela permettra de l'étendre aux éléments de  $L^\infty(\mathbb{R})$ , en retirant un ensemble de mesure nulle.

**Proposition 5.** Soit  $J \subset \mathbb{C}$  et soit  $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ . Supposons qu'il existe  $x, y, z \in J$  deux-à-deux distincts tels que pour tout  $t \in J \setminus \{x, y, z\}$  on ait  $f(t) \notin \{f(x), f(y), f(z)\}$  et

$$[f(x), f(y), f(z), f(t)] = [x, y, z, t].$$

Alors il existe une homographie  $h: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  telle que  $f = h|_J$ .

*Démonstration.* Soient  $x, y, z \in J$  comme dans l'hypothèse. On pose  $a = f(x)$ ,  $b = f(y)$ ,  $c = f(z)$ . On note  $A = \begin{pmatrix} z-x & y(x-z) \\ z-y & x(y-z) \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} c-a & b(a-c) \\ c-b & a(b-c) \end{pmatrix}$ . Par le lemme 8, pour  $t \in \mathbb{C} \setminus \{x, y, z\}$ , on a  $h_A(t) = [x, y, z, t]$ , et pour  $s \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c\}$ , on a  $h_B(s) = [a, b, c, s]$ . Pour  $t \in J \setminus \{x, y, z\}$ , il vient :

$$\begin{aligned}h_B(f(t)) &= [a, b, c, f(t)] \\ &= [f(x), f(y), f(z), f(t)] \\ &= [x, y, z, t] \text{ par hypothèse} \\ &= h_A(t).\end{aligned}$$

Par le lemme 7, on conclut que  $f$  est la restriction à  $J$  de l'homographie  $h_{B^{-1}A}$ . □

**Remarque 5.** La proposition 5 implique en fait l'énoncé plus algébrique suivant : les transformations de la droite projective  $\widehat{\mathbb{C}}$  qui préservent le birapport sont exactement les homographies. Ce résultat est parfois connu sous le nom de théorème fondamental de la géométrie projective.

Il nous reste à établir un dernier lemme technique avant le théorème principal.

**Lemme 9.** Soit  $a, u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Notons  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction

$$\varphi(x, y) = a(x) - a(y) - (x - y)u(x)v(y).$$

Supposons que  $\varphi = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors, on a un ensemble  $J \subset \mathbb{R}$ , ainsi qu'une famille  $(J_x)_{x \in J}$  de parties de  $\mathbb{R}$  indexée par  $J$ , qui vérifient pour tout  $x \in J$  :

- $J_x \subset J \setminus \{x\}$ ;
- $J_x$  est de mesure pleine dans  $\mathbb{R}$  (et donc  $J$  aussi);
- pour tout  $y \in J_x$ , on a  $\varphi(x, y) = 0$ ;
- s'il existe  $y \in J_x$  tels que  $a(y) = a(x)$ , alors  $a$  est constante presque partout.

*Démonstration.* Le lemme 4 affirme l'existence de  $J \subset \mathbb{R}$  de mesure pleine tel que  $\varphi_x = 0$  presque partout pour tout  $x \in J$ . Cela revient à dire que pour tout  $x \in J$ , on a un ensemble  $I \subset \mathbb{R}$ , de mesure pleine, tel que pour tout  $y \in I$ , on a  $\varphi(x, y) = 0$ . Comme l'intersection de deux ensembles de mesure pleine est de mesure pleine, et que la mesure de Lebesgue d'un singleton est nulle, pour  $x \in J$ , l'ensemble  $J_x = (I \cap J) \setminus \{x\}$  est aussi de mesure pleine. Par construction, pour tout  $y \in J_x$ , on a  $\varphi(x, y) = 0$ . On considère donc la famille  $(J_x)_{x \in J}$  ainsi construite, elle satisfait bien aux trois premières conditions.

Il reste à vérifier que s'il existe  $x \in J$  et  $y \in J_x$  tels que  $a(y) = a(x)$ , alors  $a$  est constante presque partout. Supposons qu'il existe de tels  $x \in J$  et  $y \in J_x$ . Il vient

$$0 = \varphi(x, y) = a(x) - a(y) - (x - y)u(x)v(y) = (y - x)u(x)v(y).$$

Comme par construction  $x \notin J_x$ , on a  $y \neq x$  et on en conclut que  $u(x)v(y) = 0$ . Il y a alors deux possibilités :  $u(x) = 0$  ou  $v(y) = 0$ .

Supposons que  $u(x) = 0$ . Alors, pour tout  $y \in J_x$ , il vient

$$0 = \varphi(x, y) = a(x) - a(y) - 0$$

et donc  $a(y) = a(x)$ . Comme  $J_x$  est de mesure pleine, on en conclut que  $a$  est constante presque partout.

Supposons maintenant que  $u(x) \neq 0$ . On a alors  $v(y) = 0$ . Comme  $y \in J_x \subset J$ , on peut aussi considérer l'ensemble de mesure pleine  $J_y$  défini comme précédemment. Pour tout  $z \in J_y$ , on a alors

$$0 = \varphi(y, z) = (a(y) - a(z)) - 0$$

et donc encore une fois,  $a$  est constante presque partout.

On a ainsi montré que s'il existe  $y \in J_x$  avec  $a(x) = a(y)$ , alors  $a$  est constante presque partout, ce qui termine la preuve.  $\square$

On peut maintenant s'attaquer à la résolution de l'équation (3) et à la caractérisation des opérateurs  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  pour lesquels  $da$  est de rang 1.

**Théorème 13.** Soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $da$  est un opérateur de rang 1;
2. il existe  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$  non nulles telles que  $\frac{a(x)-a(y)}{x-y} = u(x)v(y)$  pour presque tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
3. il existe une homographie  $h: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , non affine et dont le pôle n'est pas dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $a$  est presque partout égale à  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Afin de rendre la preuve plus naturelle, on va suivre le parcours (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1).

Commençons par montrer que (1)  $\Rightarrow$  (2). Supposons que  $da$  soit de rang 1, i.e.  $\text{Im } da$  est une droite vectorielle. Prenons  $u \in L^2(\mathbb{R})$  un vecteur non nul de  $\text{Im } da$ . Par définition, pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , il existe un complexe  $\lambda(f) \in \mathbb{C}$  tel que  $da(f) = \lambda(f)u$ . Montrons que la fonction  $\lambda$  est une fonction linéaire de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{C}$ .

On prend  $z \in \mathbb{C}$  et  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\lambda(f + zg)u &= da(f + zg) = da(f) + zda(g) \\ &= \lambda(f)u + z\lambda(g)u = (\lambda(f) + z\lambda(g))u.\end{aligned}$$

Comme  $u \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda(f + zg) = \lambda(f) + z\lambda(g)$ . Ceci étant vrai pour tous  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ , on en conclut que la fonction  $\lambda$  est linéaire.

Montrons maintenant que  $\lambda$  est continue. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Il vient :

$$|\lambda(f)| = \|u\|_2^{-1} \|\lambda(f)u\|_2 = \|u\|_2^{-1} \|da(f)\| \leq \|u\|_2^{-1} \|da\| \|f\|_2$$

où  $\|da\|$  est la norme d'opérateur de  $da$  (finie car  $da$  est un opérateur continu). On en conclut que  $\lambda$  est une forme linéaire continue, avec  $\|\lambda\| \leq \frac{\|da\|}{\|u\|_2}$ .

Par le théorème de Riesz (le théorème 1), il existe un vecteur  $v \in L^2(\mathbb{R})$  tel que  $\lambda = (\cdot, v)$ . On obtient ainsi deux fonctions  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$  telles que  $da(f) = (f, v)u$  pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , et ces fonctions sont non nulles puisque  $da \neq 0$  (étant de rang 1). Notons  $k(x, y) = \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$ . En utilisant l'expression de  $da$  obtenue au paragraphe 5.5.6, il vient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}0 &= da(f)(x) - (f, v)u(x) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y)f(y)dy \right) - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\bar{v}(y)dy \right) u(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (k(x, y) - u(x)\bar{v}(y))f(y)dy.\end{aligned}$$

Ce calcul montre que l'opérateur de noyau  $(x, y) \mapsto k(x, y) - u(x)\bar{v}(y)$  est nul.

Maintenant, on a vu au paragraphe 5.5.7 que  $k \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ . De plus, on a

$$(x, y) \mapsto u(x)\bar{v}(y) = (u \otimes \bar{v})(x, y)$$

et on sait (grâce au théorème de Fubini) que  $u \otimes \bar{v} \in L^2(\mathbb{R}^2) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ . Sachant que  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est un espace vectoriel (ce fait est dû, rappelons-le, à l'inégalité de Cauchy-Schwarz), il est aisé de vérifier que  $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$  est aussi un espace vectoriel. Cela implique que  $\psi: (x, y) \mapsto k(x, y) - u(x)\bar{v}(y) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ .

Par la remarque 4, on en déduit que  $\psi$  est nul presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ . Autrement dit, pour presque tous  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\frac{a(x) - a(y)}{x - y} = u(x)\bar{v}(y).$$

Comme  $u \neq 0$  et  $\bar{v} \neq 0$ , cela termine la preuve de (1)  $\Rightarrow$  (2).

Montrons que (2)  $\Rightarrow$  (3). Supposons (2). On adopte la notation

$$\varphi(x, y) = a(x) - a(y) - (x - y)u(x)v(y)$$

et on suppose que  $\varphi(x, y) = 0$  pour presque tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Commençons par montrer que  $a$  n'est pas constante presque partout. Par contraposée, on va montrer que si  $a$  est constante, alors  $u = 0$  ou  $v = 0$  (tout cela presque partout), ce qui contredit (2). Supposons  $a$  constante presque partout. La nullité de  $\varphi$  implique que la fonction  $(x, y) \mapsto u(x)v(y)$  est nulle pour presque tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Le lemme 4 donne alors que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $y \mapsto u(x)v(y)$  est nulle presque partout. Si  $v$  est nulle presque partout, on a le résultat voulu. Sinon, cela implique que  $u(x) = 0$ . Ceci étant vrai pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u$  est nulle presque partout, ce qui est le résultat voulu à nouveau.

On va maintenant chercher à se placer dans les hypothèses de la proposition 5. Pour cela, on va devoir construire un bon ensemble de mesure pleine sur lequel  $a$  est définie et satisfait les hypothèses de la proposition 5. Comme  $\varphi$  est nulle presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ , on peut appliquer le lemme 9 et on obtient la famille  $(J_x)_{x \in J}$ . Rappelons que  $J$  et les ensembles  $J_x$  sont de mesure pleine dans  $\mathbb{R}$ , que  $J_x \subset J \setminus \{x\}$  pour tout  $x \in J$  et que  $\varphi(x, y) = 0$  pour tout  $x \in J$  et  $y \in J_x$ . De plus, comme on a vérifié que  $a$  n'était pas constante presque partout, on a aussi  $a(y) \neq a(x)$  pour tout  $x \in J$  et  $y \in J_x$ .

Fixons  $x \in J$ ,  $y \in J_x$  et  $z \in J_y$  (il y a bien un ensemble  $J_y$  parce que  $y \in J_x \subset J$ ). Posons  $I = (J_x \cap J_y \cap J_z) \cup \{x, y, z\}$  ( $J_z$  existe car  $z \in J_y \subset J$ ). Maintenant, on a  $a|_I: I \rightarrow \mathbb{C}$ , avec  $I \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Les points  $x, y, z$  sont deux-à-deux distincts, et  $a(x), a(y), a(z)$  aussi par le lemme 9. De plus, pour  $t \in I \setminus \{x, y, z\}$ , par le lemme 9, on a  $a(t) \notin \{a(x), a(y), a(z)\}$ . Enfin, en utilisant les égalités  $\varphi(x, z) = 0$ ,  $\varphi(y, t) = 0$ ,  $\varphi(x, t) = 0$  et  $\varphi(y, z) = 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} [a(x), a(y), a(z), a(t)] &= \frac{(a(x) - a(z))(a(y) - a(t))}{(a(x) - a(t))(a(y) - a(z))} \\ &= \frac{(x - z)u(x)v(z)(y - t)u(y)v(t)}{(x - t)u(x)v(t)(y - z)u(y)v(z)} \\ &= \frac{(x - z)(y - t)}{(x - t)(y - z)} \\ &= [x, y, z, t]. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer la proposition 5 et on obtient une homographie  $h: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  telle que  $a|_I = h|_I$ . Comme  $I$  est de mesure pleine et que  $a$  est essentiellement bornée, on obtient que  $h$  doit être bornée. Comme une fonction affine n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ ,  $h$  n'est pas affine. De plus, on vérifie aisément que  $h$  n'est pas bornée au voisinage de son pôle. Cela implique que le pôle de  $h$  n'est pas dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $I$  est de mesure pleine dans  $\mathbb{R}$ , on a donc montré que  $a$  est presque partout égale à une homographie non affine dont le pôle n'est pas dans  $\mathbb{R}$ , ce qui est (3).

Montrons que (3)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $h$  une homographie non affine dont le pôle n'est pas dans  $\mathbb{R}$ . On note abusivement  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la restriction de  $h$  à  $\mathbb{R}$ . Déjà, vérifions que  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Pour cela, on prend  $A = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  telle que  $h = h_A$ . En utilisant le fait que  $h_{\lambda A} = h_A$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , on peut supposer que  $\det(A) = 1$ . Maintenant, par hypothèse, on a aussi  $t \neq 0$  ( $h$  n'est pas affine) et  $\frac{-u}{t} \notin \mathbb{R}$  (son pôle n'est pas réel). On en conclut que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'expression  $h(x) = \frac{rx+s}{tx+u}$  est valide et bien définie. Cela implique que  $h$  est une fonction continue

de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . De plus, comme  $t \neq 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{r}{t}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{r}{t}$ . Ainsi,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue qui a une limite finie en  $+\infty$  et  $-\infty$ , elle est donc bornée. On obtient donc bien que  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

Ensuite, fixons  $x, y \in \mathbb{R}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= \frac{rx + s}{tx + u} - \frac{ry + s}{ty + u} \\ &= \frac{1}{(tx + u)(ty + u)} ((rx + s)(ty + u) - (ry + s)(tx + u)) \\ &= \frac{1}{(tx + u)(ty + u)} (rtxy + rux + sty + su - rtxy - ruy - stx - su) \\ &= \frac{1}{(tx + u)(ty + u)} (ru - st)(x - y) \\ &= \frac{(x - y)}{(tx + u)(ty + u)} \end{aligned}$$

parce qu'on a supposé  $1 = \det(A) = (ru - st)$ . On en conclut que pour  $x \neq y$ , on a

$$\frac{h(x) - h(y)}{x - y} = v(x)v(y)$$

avec  $v(x) = \frac{1}{tx + u}$ . Remarquons que cela définit bien une fonction  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  puisque le pôle de  $h$  n'est pas dans  $\mathbb{R}$ , et clairement  $v$  n'est pas nulle presque partout. Pour obtenir (2), il reste seulement à vérifier que  $v \in L^2(\mathbb{R})$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , notons  $P(x) = |tx + u|^2$ . C'est une fonction continue et positive. L'hypothèse  $\frac{-u}{t} \notin \mathbb{R}$  implique que  $P$  ne s'annule pas. Il vient :

$$P(x) = |t|^2 x^2 + 2x\Re(t\bar{u}) + |u|^2,$$

donc  $P$  est un polynôme du second degré (on a bien  $|t|^2 \neq 0$  par hypothèse).

Maintenant, on a  $|v|^2 = P^{-1}$ . Comme  $P$  est un polynôme du second degré, on a  $\frac{1}{P(x)} = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$  et  $\frac{1}{P(x)} = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$ . Comme la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , on en conclut l'existence de  $A > 0$  tel que  $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$  est intégrable sur le complémentaire de  $[-A, A]$ . Il reste à vérifier que  $P^{-1}$  est intégrable sur  $[-A, A]$ . Mais  $P$  est une fonction continue qui ne s'annule pas, donc  $P^{-1}$  est continue. Cela implique qu'elle est intégrable sur le segment  $[-A, A]$  et termine la preuve de (3)  $\Rightarrow$  (2).

Finalement, vérifions que (2)  $\Rightarrow$  (1). Supposons qu'il existe  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$  non nulles telles que  $a, u$  et  $v$  soient solutions de l'équation (3) sur presque tout  $\mathbb{R}^2$ . Cela implique que la fonction  $\psi: (x, y) \mapsto \frac{a(x) - a(y)}{x - y} - u(x)\bar{v}(y)$  est nulle presque partout, et donc l'opérateur  $T_\psi$  de noyau  $\psi$  est nul. Pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= T_\psi(f)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) f(y) dy \\ &= (da)(f)(x) - (f, v)u(x). \end{aligned}$$

On en conclut que  $da(f) = (f, v)u$ . Il s'ensuit que  $\text{Im } da \subset \mathbb{C}u$ , donc  $da$  est soit nulle, soit de rang 1. Comme  $u$  et  $v$  sont non nulles, on a  $da(v) = \|v\|_2^2 u \neq 0$ , donc  $da$  est non nulle. On en conclut que  $da$  est de rang 1, ce qui termine la preuve.  $\square$

L'équivalence (2)  $\Leftrightarrow$  (3) consiste en la résolution de l'équation dressée au début de cette section dans le cadre de la théorie de la mesure. On peut en conclure la résolution exacte suivante pour des fonctions complexes.

**Corollaire 3.** Soit  $J \subset \mathbb{C}$  et  $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ . Supposons qu'il existe  $u, v: J \rightarrow \mathbb{C}$  telles que pour tous  $x, y \in J$ , avec  $x \neq y$ , on ait

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = u(x)v(y).$$

Alors soit  $f$  est constante, soit  $f$  est une homographie dont le pôle n'est pas dans  $J$ , et toutes ces fonctions sont possibles.

*Démonstration.* La preuve consiste surtout à extraire les parties nécessaires de la preuve du théorème 13 et à enlever les contraintes liées aux égalités presque partout. On ne va donc pas reproduire tous les calculs.

On commence par l'équivalent simplifié du lemme 9. L'équation satisfaite par  $f$  implique que si  $f$  n'est pas constante, elle est injective. En effet, si  $f(x) = f(y)$  avec  $x \neq y$ , alors  $u(x)v(y) = 0$ . Par symétrie, on peut supposer que  $u(x) = 0$ , et donc pour tout  $z \neq x$ , on a  $f(z) = f(x)$  et  $f$  est constante sur  $J$ .

Maintenant, l'injectivité de  $f$  assure que le birapport  $[f(x), f(y), f(z), f(t)]$  est bien défini pour tous  $x, y, z, t \in J$  deux-à-deux distincts. Le même calcul que pour la preuve de (2)  $\Rightarrow$  (3) du théorème précédent permet de montrer que  $[f(x), f(y), f(z), f(t)] = [x, y, z, t]$ . On peut alors appliquer la proposition 5 et conclure.

Réciproquement, il est clair que les fonctions constantes satisfont à l'équation voulue. Pour les homographies, il est nécessaire que leur pôle ne soit pas dans  $J$  pour que leur image soit incluse dans  $\mathbb{C}$ , et le même calcul que dans la preuve de (3)  $\Rightarrow$  (2) montre qu'elles satisfont bien à l'équation voulue. Seulement, il n'y a pas besoin de se restreindre au cas où l'homographie est bornée ni de vérifier que  $u$  et  $v$  sont de carré intégrable.  $\square$

## 5.6 Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Alain Connes pour avoir produit de si belles mathématiques et les avoir présentées de façon si fascinante au château du Goutelas. Je le remercie aussi pour ses réponses à mes mails toujours bienveillantes et très éclairantes. Je suis énormément redevable à Christopher-Lloyd Simon qui, outre avoir été un des organisateurs exceptionnels du week-end du Goutelas, a fait un travail de coordination et d'écriture considérable pour l'élaboration du compte-rendu du week-end, dont la présente note fait partie. Je le remercie tout particulièrement du temps qu'il a pris pour me conseiller et me relire, ainsi que pour les fructueuses discussions mathématiques que nous avons eues au cours de l'écriture de cette note. Je remercie Aurélien Alvarez pour les discussions et conseils qu'il m'a prodigués, ainsi que Jean-Claude Sikorav en particulier pour m'avoir indiqué le théorème de Lusin qui s'est révélé très utile. Tout spécialement, je suis reconnaissant à Mikaël de la Salle de m'avoir communiqué la belle preuve du théorème 9, et à Bruno Duchesne d'être à l'origine de cette résolution de l'équation 3, en m'ayant indiqué qu'une fonction qui préserve le birapport est une homographie. Enfin,

je remercie Pegah Pournajafi pour les nombreuses discussions ainsi que pour son intérêt pour le sujet qui ont nourri l'écriture de cette note.

## A La musique des nombres premiers

Les mathématiques interagissent avec divers aspects de la musique, parfois de manière profonde et inattendue. Elles expliquent la partition d'un gamme en 12 notes, et à sont à l'origine de la musique des nombres premiers.

### A.1 Quand la musique devient mathématique

Présentons d'abord l'une des applications les plus communes des mathématiques à la musique, à savoir la partition d'une gamme en 12 notes.

#### A.1.1 La naissance d'un son

Les instruments de musique produisent un son en faisant vibrer les molécules d'air à leur proximité, la vibration se propage ensuite jusqu'à notre oreille qui perçoit le son. Pour simplifier, supposons que l'instrument de musique ne soit constitué que d'une seule corde de longueur  $L$  fixée à ses extrémités (comme une guitare n'ayant qu'une corde).

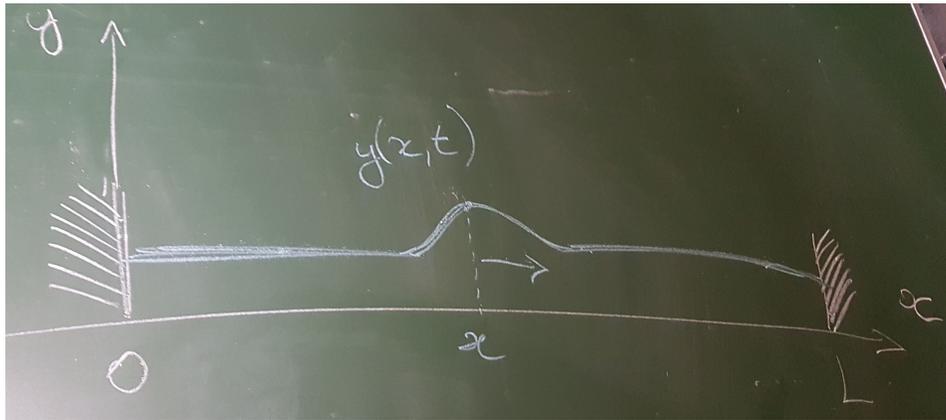


Schéma de la corde de Melde

En pinçant la corde, elle vibre, agite les molécules d'air au voisinage, et crée un son. L'équation physique des ondes exprimant la hauteur  $y$  de la corde en fonction de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$  :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Ses solutions générales s'expriment comme la superposition d'une onde de profil  $f$  se propageant vers la gauche et de profil  $h$  se propageant vers la droite, toutes deux à la célérité  $c$  :

$$y(x, t) = f(ct + x) + g(ct - x)$$

ayant pour conditions limites :

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(ct) = -g(ct) \\ g(ct - L) = g(ct + L) \end{cases}$$

L'équation des ondes est valable aussi bien pour la vibration unidimensionnelle d'une corde que pour la propagation du son dans l'air. Cependant la célérité change d'un milieu à l'autre, plus le milieu est rigide plus l'onde se déplace vite. Par exemple dans l'air  $c \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  tandis que dans une corde  $c \approx 1480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La décomposition en série de Fourier invite à se ramener au cas où  $f$  et  $g$  sont sinusoidales :

$$y(x, t) = A [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)] \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

On en déduit l'expression à variables temporelle et spatiales séparées :

$$y(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t).$$

Les conditions aux limites, en  $x = L$ , donnent :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L} = n\omega_1 \quad n \in \mathbb{N}$$

où  $\omega_1$  s'appelle la *pulsation fondamentale*, associée à la fréquence fondamentale, qui dépend de la longueur de la corde : une corde longue donne une faible pulsation fondamentale, donc une faible fréquence fondamentale et la note sonne grave.

On observe ainsi que la base des solutions correspond à celles qui peuvent être exprimées à variables séparées, et qui au cours du temps vibrent entre deux enveloppes sinusoidales en la variable d'espace : on observe un profil avec des noeuds également répartis le long de la corde. Ces solutions vibrent aux pulsations  $n\omega_1$  multiples de la fondamentale. La collection des pulsations s'appelle le spectre du son.

Il est également possible de considérer un modèle où la corde est libre à l'extrémité  $x = L$ . Ce modèle est aussi valable pour des tubes cylindriques fermé-ouvert (comme une clarinette par exemple). La condition à la limite  $x = L$  est que la pente est nulle (la pression - dérivée de la vitesse - est nulle à la sortie du tube). On obtient aussi des pulsations discrétisées :

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c}{L}$$

### A.1.2 Accorder les instruments

Nous reprenons le modèle de la corde fixée aux extrémités, et commençons par en fixer la longueur de telle sorte que sa fréquence fondamentale, ou harmonique fondamentale, vaille  $\omega := 440 \text{ Hz}$ . Dans le monde de la musique, cette fréquence correspond à la note LA. En fait, la fréquence du LA a beaucoup changé dans l'histoire de la musique. Dans la musique baroque (du début du 17<sup>e</sup> siècle à la moitié du 18<sup>e</sup> siècle), on lui donnait la fréquence 415 Hz (soit un demi-ton en dessous du LA moderne). Au temps de Chopin, on réglait le LA autour de 430 Hz. L'accord moderne des instruments tend au LA 440 ou LA 442. Ce sujet cause de vifs débats parmi certains musiciens.

Pour construire la gamme (DO RE MI FA SOL LA SI ...), on considère les harmoniques successives, dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale, et c'est parce que ces notes sonnent de manière harmonieuse qu'on les appelle ainsi.

La prochaine harmonique a la fréquence double  $2\omega = 880 \text{ Hz}$ . On l'appelle *l'octave* (plus précisément, l'octave est le nom donné à l'intervalle qui sépare deux notes de même nom). On

appelle aussi cette note le LA (mais il est plus aigu !). Désormais, nous raisonnerons modulo une division ou multiplication par 2, ce qui revient simplement à « changer d'octave ».

La prochaine harmonique a pour fréquence  $3\omega = 1320 \text{ Hz} \equiv 660 \text{ Hz}$ . On l'appelle *la quinte juste*. On appelle cette note le MI. En considérant les quintes successives, on construit les notes successives, motivé par le fait que cet intervalle était considéré comme étant consonant par excellence. D'ailleurs, beaucoup d'instruments suivent l'accord en quinte. Par exemple pour le violon, les cordes à vide sont successivement SOL RE LA MI. (Pour la guitare, il s'agit d'un accord en quarte, avec toutefois une exception sur l'écart SOL-SI, entre la 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> corde, qui est une tierce.)

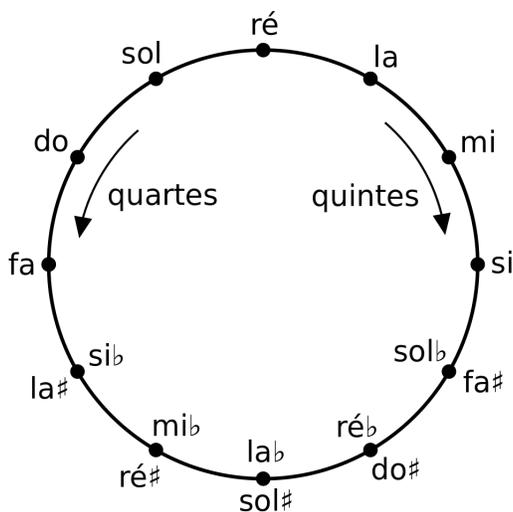
En conclusion, on obtient la note suivante dans la division en quinte modulo une octave, en multipliant la fréquence précédente par 3, puis en divisant par la puissance de 2 nécessaire pour rester proche de la fréquence d'origine (440 Hz).

LA	MI	SI	FA♯	DO♯	SOL♯	RE♯	LA♯	FA	DO	SOL	RE	?
440	660	495	371	557	418	626	470	352	529	396	297	445

Quelque chose de fabuleux se produit. Au passage de la 13<sup>e</sup> quinte, on obtient une fréquence très proche de la fréquence du LA 440 ! Nous allons donc considérer que nous sommes retombés sur le LA. Vous pouvez entraîner votre oreille en essayant les deux fréquences à l'aide d'un générateur de fréquences comme sur la page [1]. Cela découle à la très bonne approximation :

$$3^{12} \approx 2^{19}$$

qui explique pourquoi dans nos gammes, nous avons *douze notes* très exactement, construites précédemment selon le cycle des quintes, comme dessiné ci-dessous.



Cycle des quintes et des quartes

Il est intéressant de remarquer que penser la gamme dans l'ordre DO RE MI FA SOL LA SI n'est pas physiquement naturel, puisque tout est construit par les quintes. Lorsque l'on suit des

cours de solfège, on utilise l'ordre des dièses, qui suit le cycle des quintes, et l'ordre des bémols suit le cycle des quartes. La quarte correspond à l'écart complémentaire de la quinte pour obtenir l'octave. Ainsi, les intervalles considérés particulièrement harmonieux sont *l'octave juste, la quinte juste et la quarte juste*.

On peut toutefois remarquer que cette manière d'accorder les instruments souffre d'un vilain défaut : si toutes les premières quintes sont justes *par construction*, il y a un intervalle particulièrement faux, appelé *quinte du loup*. Ce nom rappelle les battements du cri du loup, caractéristique d'un accord faux. Ce problème physique forçait les compositeurs à éviter certaines tonalités pour éviter le loup, dissonance qui touche même une oreille non entraînée. Ceci n'est que l'un des problèmes de cet accord dit *accord pythagoricien*. Nous n'entrerons pas dans les détails.

D'autres solutions ont été trouvées pour essayer de palier ce problème et nous renvoyons les personnes intéressées aux *tempéraments mésotoniques* qui visent à obtenir des tierces plus justes, au détriment de quintes plus fausses. Aujourd'hui, le désaccord du loup est réparti d'une manière totalement égale (on parle de *tempérament égal*). Tous les accords sont donc très légèrement faux, sauf l'octave qui sera toujours juste.

Le système ainsi construit est dit système *heptatonique* qui contient le nom des 7 notes connues (sans leur altérations, dénommées dièses et bémols). Il faut noter qu'il existe d'autres systèmes, comme par exemple le système pentatonique (souvent utilisé dans les musiques asiatiques ou dans les solos de beaucoup de guitares) ou une subdivision de l'octave en 22 notes du système indien.

## A.2 Quand les mathématiques deviennent musique

Lors du week-end à Goutelas, Alain Connes nous a présenté des liens insoupçonnés entre la musique et les mathématiques que nous allons tenter de résumer ici.

### A.2.1 Fonctions zeta et dénombrement de points sur les courbes algébriques

**La fonction  $\zeta$ .** L'argument principal d'Alain Connes est de reconsidérer la fonction  $\zeta$  sur des corps finis, en particulier associé à des courbes algébriques (variétés algébriques de dimension 1). On peut même généraliser le propos en géométrie algébrique à des schémas.

Commençons par rappeler la définition de la fonction  $\zeta$  usuelle étudiée dans la section 4, ainsi que son produit eulérien qui la relie à l'arithmétique des nombres premiers.

**Théorème.** *La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie sur  $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re s > 1\}$  par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

*Elle admet pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re s > 1$  la factorisation en produit eulérien :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

*et elle admet une équation fonctionnelle, qui en posant  $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$  s'écrit  $\xi(s) = \xi(1 - s)$  qui permet de la prolonger analytiquement sur tout  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .*

**Corps de nombres.** Cette définition se généralise à une extension finie  $K$  de  $\mathbb{Q}$ , appelée corps de nombres. Son anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  est défini comme l'ensemble des éléments de  $K$  racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . La norme d'un idéal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathcal{O}_K$  est l'entier  $N(\mathfrak{a}) = \text{Card}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ . Le spectre d'un anneau est l'ensemble de ses idéaux premiers. On note  $\text{Spec}(A)$  le spectre d'un anneau  $A$ . Par exemple pour  $K = \mathbb{Q}$ , on a  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ , tous les idéaux sont principaux et ont pour norme  $N(n\mathbb{Z}) = n$  et les idéaux premiers sont  $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ premier}\} \cup \{(0)\}$ .

La définition de la fonction  $\zeta$  se transpose à tout corps de nombres :

$$\zeta_K(s) = \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

Les idéaux d'un corps de nombre admettent une unique factorisation en produit d'idéaux premiers. On en déduit que la fonction  $\zeta_K$  admet un développement en produit eulérien :

$$\zeta_K(s) = \prod_{0 \neq \mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

De plus elle s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe.

**Corps des fractions rationnelles sur un corps fini.** Soit  $\mathbb{F}_p$  le corps fini à  $p$  éléments. Imitons la construction précédente avec  $K = \mathbb{F}_p(t)$  le corps des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , qui rappelons-le n'est pas un corps de nombres. L'anneau d'entiers de  $\mathbb{F}_p(t)$  est celui des polynômes  $\mathbb{F}_p[t]$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ .

Nous pouvons alors définir la fonction  $\zeta_p = \zeta_{\mathbb{F}_p}$  par la somme analogue :

$$\zeta_p(s) = \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

Rappelons que  $\mathcal{O}_K = \mathbb{F}_p[t]$  est euclidien, donc principal (tous ses idéaux sont engendrés par un unique polynôme unitaire), et factoriel (tout polynôme a une unique factorisation en produit d'irréductibles). Ainsi tout idéal est d'une part engendré par un unique polynôme unitaire, et admet d'autre part une unique factorisation en produit d'idéaux premiers. On en déduit que les idéaux premiers sont engendrés par les polynômes unitaires irréductibles, donc ils sont maximaux.

Si  $Q$  est un polynôme unitaire irréductible, on a, en confondant le polynôme  $Q$  et l'idéal premier qu'il engendre  $N(Q) = p^{\deg(Q)}$ , et par multiplicativité de la norme (qui revient au lemme des restes chinois dans  $\mathbb{F}_p[t]$ ), cette formule demeure pour tous les polynômes. Ainsi :

$$\zeta_p(s) = \sum_{Q \text{ unitaire}} p^{-s \deg(Q)}$$

Comme il y a  $p^k$  polynômes unitaires de degré  $k$  on a :

$$\zeta_p(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k p^{-sk} = \frac{1}{1 - p^{1-s}}$$

Remarquons que l'on peut également factoriser en produit eulérien. Il découle de l'unique factorisation des idéaux, une factorisation indexée par les irréductibles unitaires  $Q$  de  $K$  :

$$\zeta_p(s) = \prod_Q \frac{1}{1 - N(Q)^{-s}} = \prod_Q \frac{1}{1 - p^{-\deg(Q)s}} = Z(p^{-s})$$

avec

$$Z(T) = \prod_Q \frac{1}{1 - T^{\deg(Q)}}$$

### A.2.2 Fonctions zeta et dénombrement de points sur les variétés algébriques

On peut unifier et généraliser les résultats précédents à travers la *géométrie algébrique*. Nous abandonnerons un peu de généralité pour un peu plus d'accessibilité en se restreignant à la géométrie algébrique classique (suivant Noether, Hilbert, etc.), dans laquelle les variétés algébriques sont des lieux de zéros de polynômes.

Soit  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$  et considérons la variété algébrique définie comme son lieu d'annulation :

$$H_f = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\overline{\mathbb{F}_p})^n, f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

où  $\overline{\mathbb{F}_p}$  est la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$ , que l'on peut expliciter comme  $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^n}$ .

Si  $(x_1, \dots, x_n) \in H_f$ , le plus petit entier  $s \geq 1$  tel que  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_{p^s})^n$  est appelé degré de  $(x_1, \dots, x_n)$ , noté  $\deg(x_1, \dots, x_n)$ .

On définit la fonction  $Z$  associée à la courbe  $H_f$ , ou de manière équivalente la fonction  $\zeta$  reliée par  $\zeta_p(s) = Z(p^{-s})$  comme ci-dessus, par :

$$Z(H_f, T) = \prod_{x \in H_f} \frac{1}{1 - T^{\deg(x)}}$$

On observe que la définition est absolument analogue au cas des polynômes ci-dessus. Toutes ces notions se rejoignent plus généralement dans le contexte des *schémas* en géométrie algébrique, dont on ne parlera pas.

Pour chaque  $s \geq 1$ , on considère  $N_s$  le nombre de points de  $H_f$  qui sont aussi dans  $(\mathbb{F}_{p^s})^n$  :

$$N_s = \text{Card} \left\{ x \in H_f \mid [\mathbb{F}_p[x] : \mathbb{F}_p] \leq s \right\}$$

**Proposition.** Pour tout  $f \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ , on a :

$$Z(H_f, T) = \exp \left( \sum_{s \geq 1} \frac{N_s T^s}{s} \right)$$

*Démonstration.* En effet, on a :

$$N_s = \sum_{r|s} \text{Card} \left\{ x \in H_f \mid \deg(x) = \frac{s}{r} \right\} \frac{s}{r}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\ln Z(H_f, T) &= - \sum_{x \in H_f} \ln(1 - T^{\deg(x)}) = \sum_{x \in H_f} \sum_{r \geq 1} \frac{T^{\deg(x)r}}{r} \\
&= \sum_{s \geq 1} T^s \sum_{r|s} \frac{1}{r} \text{Card} \left\{ x \in H_f \mid \deg(x) = \frac{s}{r} \right\} \quad (s = \deg(x)r) \\
&= \sum_{s \geq 1} \frac{N_s}{s} T^s
\end{aligned}$$

D'où la formule. □

Essayons de faire le lien avec ce qu'on a fait plus haut avec  $f = 0$  et  $n = 1$ . Cette variété algébrique s'appelle la droite affine, notée  $H_f = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  et s'identifie à  $\overline{\mathbb{F}_p}$ . Alors  $N_s = p^s$ , donc :

$$Z(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1, T) = \exp\left(\sum_{s \geq 1} \frac{p^s T^s}{s}\right) = \exp(-\ln(1 - pT)) = \frac{1}{1 - pT}$$

On retrouve la fonction  $Z$  définie dans la partie précédente, d'après le calcul pour  $\zeta_p(s) = Z(p^{-s})$ .

Cela découle du fait que  $\overline{\mathbb{F}_p}$  s'identifie (presque) à  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$ . En effet, à tout élément de  $\overline{\mathbb{F}_p}$ , on peut lui associer son polynôme minimal qui est unitaire irréductible (donc un élément de  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$ ). Le procédé n'est pas tout à fait bijectif car il est possible que plusieurs éléments de  $\overline{\mathbb{F}_p}$  aient même polynôme minimal, on dit qu'ils sont conjugués. Mais d'un point de vu algébrique, cela signifie que ces éléments sont indissociables. Plus formellement, on peut identifier  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$  à  $\overline{\mathbb{F}_p}$  quotienté par l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ .

On peut généraliser les raisonnements précédents à des variétés projectives sur  $\mathbb{F}_p$ . Typiquement, l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  de dimension  $n$ . On peut montrer dans ce cas que :

$$N_s = \frac{p^{s(n+1)} - 1}{p^s - 1} = \sum_{k=0}^n p^{ks}$$

On en déduit que :

$$\ln Z(\mathbb{P}^n, T) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n p^{sk} \right) \frac{T^s}{s} = - \sum_{k=0}^n \ln(1 - p^k T)$$

d'où :

$$Z(\mathbb{P}^n, T) = \frac{1}{(1 - T)(1 - pT) \dots (1 - p^n T)}$$

### A.2.3 Sur les conjectures de Weil, et la définition des rythmes d'une courbe sur $\mathbb{F}_p$

Il est remarquable (et non évident) que dans les deux exemples précédents, où l'on a pris  $V = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$  et puis  $V = \mathbb{P}^n$ , on a trouvé  $Z(V, T) \in \mathbb{Q}(T)$ .

**Théorème** (Une conjecture de Weil). *Si  $V$  est une variété algébrique projective lisse, alors  $Z(V, T)$  est une fraction rationnelle.*

**Remarque.** Le nom de conjecture est resté dans la littérature. Elles sont au nombre de trois (ou quatre selon les sources), énoncées par André Weil à la fin des années 1940. En particulier, celle-ci a été démontrée par Bernard Dwork en 1960 en utilisant les nombres  $p$ -adiques. Les deux autres furent complétées en 1974 par Pierre Deligne.

Jusqu'à la fin du paragraphe, on se restreint à des courbes sur un corps fini. Il s'agit d'un cas particulier des conjectures de Weil qui a été démontré par Weil lui-même.

Autrement dit  $C$  est une variété algébrique de dimension 1 sur  $\mathbb{F}_p$ . Les courbes projectives lisses s'identifient aux extensions de corps de degré de transcendance 1.

La dimension de l'espace des formes différentielles sur cette courbe est le *genre* de  $C$ . Sur le corps des complexes, le genre correspond au nombre de anses (ou de trous) de la surface de Riemann associée. La droite projective est de genre 0.

Les zéros de la fonction  $Z$  définie sur la courbe  $C$  sont donnés par les racines du numérateur, et on peut démontrer que ce numérateur est de degré  $2g$  où  $g$  est le genre de la courbe  $C$ .

Un théorème d'André Weil affirme que que les zéros de  $P$  sont sur le cercle de rayon  $p^{-\frac{1}{2}}$  (c'est l'équivalent de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis). Puisque  $\zeta(s) = Z(H_f, p^{-s})$ , on en déduit que les zéros de  $\zeta$  sont de partie réelle  $\frac{1}{2}$  et leur partie imaginaire sont de la forme :

$$\frac{1}{\ln(p)}(\alpha_j + 2k\pi) \quad j \in \{1, \dots, 2g\}, k \in \mathbb{Z}$$

Les  $\alpha_j$  sont les arguments des zéros de  $\zeta$ . Puisqu'ils sont déterminés modulo  $2\pi$ , en prenant leur valeur principale dans  $[-\pi, \pi[$ , on obtient un "rythme". *Ce rythme va nous permettre d'écouter la musique des nombres premiers.*

Comme la plupart des fonctions  $\zeta$ , à commencer par celle de Riemann, celles des courbes sur  $\mathbb{F}_p$  satisfont une équation fonctionnelle, qui en termes de  $Z(H_f, T)$  s'écrit

$$Z(H_f, (pT)^{-1}) = \pm (pT^2)^{1-s} \cdot Z(H_f, T)$$

En termes de  $\zeta$ , on trouverait  $\zeta(s) = \zeta(1-s)$  qui est en fait l'analogie de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction  $\zeta$  classique.

Cette équation fonctionnelle permet de montrer que le rythme est palindromique, ie :

$$\alpha_{2g+1-j} = -\alpha_j$$

#### A.2.4 Réalisation rythmique

Lors de son exposé, Alain Connes nous a fait écouter le "rythme" des zéros de certaines fonctions  $\zeta$  associées à certaines courbes. Ils sont tous de module  $p^{-\frac{1}{2}}$ , mais leur argument forme une famille palindromique comme on l'a vu ci-dessus. On code le rythme :

$$-\pi \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_g \leq 0 \leq \alpha_{g+1} \leq \dots \leq \alpha_{2g} \leq \pi$$

Les valeurs sont en général irrationnelles, mais cela n'est pas nouveau en musique (Olivier Messiaen, compositeur français, a introduit les subdivisions irrationnelles en musique), la période du rythme est donné par  $\frac{2\pi}{\ln p}$ . Le tempo augmente donc lorsque  $p$  augmente. Ne pas confondre le

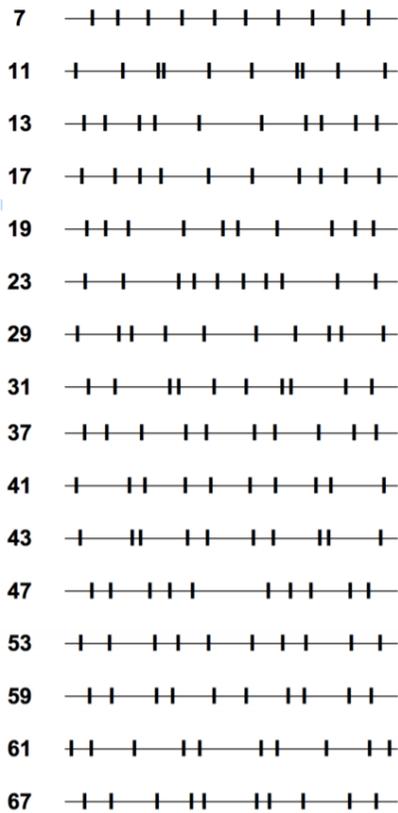
tempo avec le rythme : le rythme est la relation et le placement des sons dans une mesure, tandis que le tempo est la vitesse à laquelle la mesure est "lue".

Afin d'obtenir les différents rythmes, Alain Connes commence par une courbe hyperelliptique sur  $\mathbb{Q}$ , définie par une équation de la forme  $y^2 = P(x)$ . Si  $p$  ne divise pas le discriminant de  $P$ , on obtient une courbe sur  $\mathbb{F}_p$  et on peut calculer les zéros de la fonction  $\zeta$  associée.

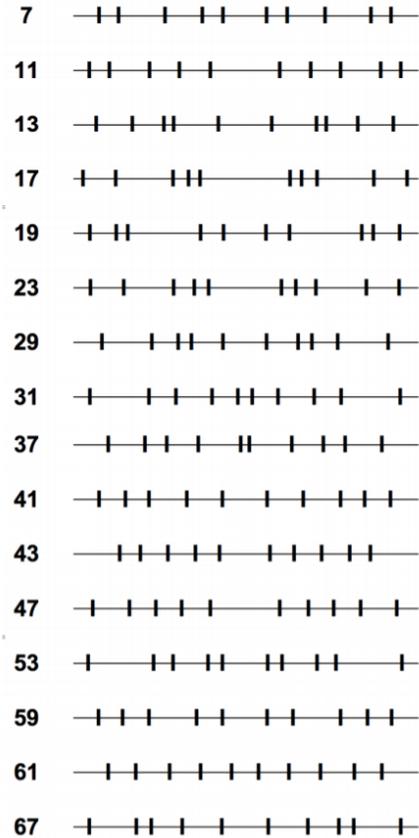
Pour  $P_1(x) = x^{11} - 4x^{10} + 15x^8 - 40x^6 + 20x^5 + 25x^3 - 25$ , la courbe  $C_1: y^2 = P_1(x)$  a pour discriminant  $-8 \times 10^{26}$ , qui n'est divisible par aucune nombre premier  $p \in \{7, 11, \dots, 67\}$ .

Pour  $P_2(x) = x^{11} - 60x^7 - 64x^6 - 320x^4 - 380x^3 - 512x - 640$  la courbe  $C_2: y^2 = P_2(x)$  a pour discriminant  $-144115188075855872^2 \times 10^{17} \approx -1,4 \times 10^{34}$ .

On représente les rythmes associés aux courbes  $C_1$  et  $C_2$  sur  $\mathbb{F}_p$  pour  $p$  premier entre 7 et 67.



Rythme de la courbe (modulo  $p$ )  $C_1$



Rythme de la courbe (modulo  $p$ )  $C_2$

Il essaie aussi les courbes hyperelliptiques  $y^2 = P_k(x)$  donnés par les polynômes  $P_k$  suivants :

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= x^{11} - x^{10} + x^9 - 5x^8 + 8x^7 - 8x^6 + 8x^5 - 14x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x - 1 \\
P_4(x) &= x^{11} - x^{10} + 3x^9 + x^8 - 8x^7 - 8x^5 + 24x^4 + 58x^3 + 86x^2 + 86x + 50 \\
P_5(x) &= x^{11} - x^{10} + 7x^9 - 15x^8 + 36x^7 - 48x^6 + 108x^5 - 144x^4 + 90x^3 - 162x^2 + 162x + 98 \\
P_6(x) &= x^{11} - 3x^{10} - 6x^9 + 12x^8 + 18x^7 - 54x^6 - 96x^5 + 72x^4 + 126x^3 - 206x^2 - 336x - 96
\end{aligned}$$

de discriminants respectifs :

$$\begin{aligned}
-3779136 \times 10^9 &\approx -3,8 \times 10^{15}, \\
-7160804737024 \times 10^{18} &\approx -7,1 \times 10^{30}, \\
-306418398276365351647232 \times 10^9 &\approx -3,1 \times 10^{32}, \\
25149838559204148841414656 \times 10^9 &\approx 2,5 \times 10^{34}.
\end{aligned}$$

### A.2.5 La musique des nombres premiers

Maintenant Alain Connes génère 10 notes de musique associées aux nombres premiers entre 7 et 67 à superposer sur le rythme. Sa construction fait intervenir un certain nombre de choix qui semblent plus ou moins arbitraire, mais reposent sur une intuition.

Il associe à une partition le nombre  $\sqrt{p}$  où  $p$  est un nombre premier. Nous avons vu en première partie que la gamme de musique est partitionnée en notes selon les puissances du nombre  $q = 2^{\frac{1}{12}}$ . On cherche un entier  $n_1(p)$  tel que  $\sqrt{p} \approx q^{n_1(p)}$ . Par exemple :

$$n_1(p) = \left\lfloor \frac{6 \ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor$$

Nous cherchons maintenant un moyen de retrouver l'entier  $p$  à partir des entiers  $n_j(p)$ . Alain Connes considère donc le développement en fraction continue :

$$\frac{6 \ln(p)}{\ln(2)} = n_1(p) + \frac{1}{n_2(p) + \frac{1}{n_3(p) + \frac{1}{n_4(p) + \frac{1}{n_5(p) + \dots}}}}$$

Alain Connes choisit enfin les différences successives des  $n_j(p)$  pour implémenter en notes :

$$\begin{aligned}
&n_1(p) \\
&n_1(p) - n_2(p) \\
&n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) \\
&n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) - n_4(p) \\
&n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) - n_4(p) + n_5(p) \\
&\dots
\end{aligned}$$

et complète par symétrie pour respecter le caractère palindromique du rythme des nombres premiers entre 7 et 67. Il reste à harmoniser (ajouter les accords), et ceci est une affaire de goût !

### A.2.6 Une pièce de théâtre de 3600 acteurs

Il est temps d'accompagner cette musique d'un petit spectacle!

Cette représentation suit le crible d'Érathosthène. La scène est constituée par deux immenses carrés discrets de taille  $60 \times 60 = 3600$ .

Initialement, seules les cases du rectangle supérieur sont "allumées". On suit le crible d'Érathosthène : tous les multiples de 2 (sauf 2 lui-même) descendent dans le carré inférieur pendant que la musique du 2 est jouée.

Puis viennent le tour des multiples stricts de 3, de 5.

Ensuite on voit les multiples stricts de 7, qui descendent petit à petit pendant que l'on entend jouer la musique du 7.

La pièce se termine lorsque tous les danseurs non premiers sont descendus, c'est-à-dire dès que la musique du 61 est finie.

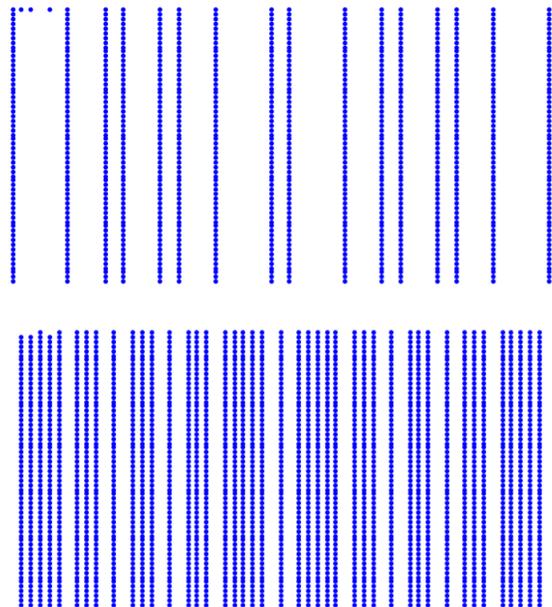
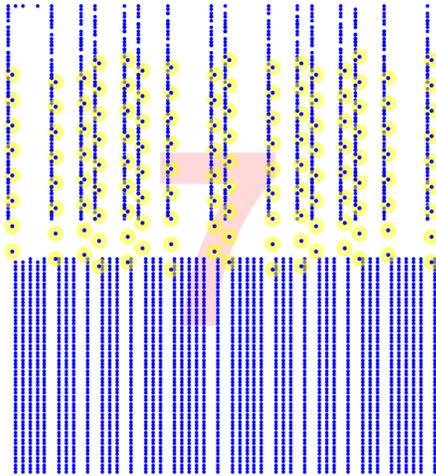
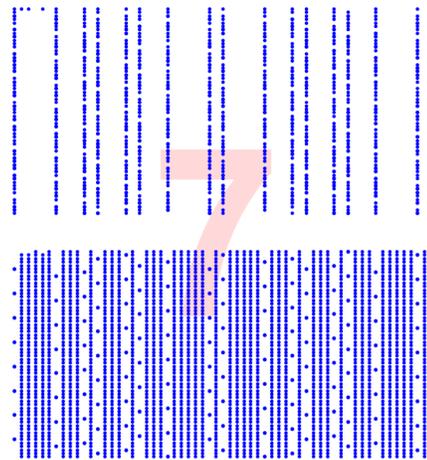


Figure 2 – Début du spectacle



Danse des multiples de 7



Fin des multiples de 7

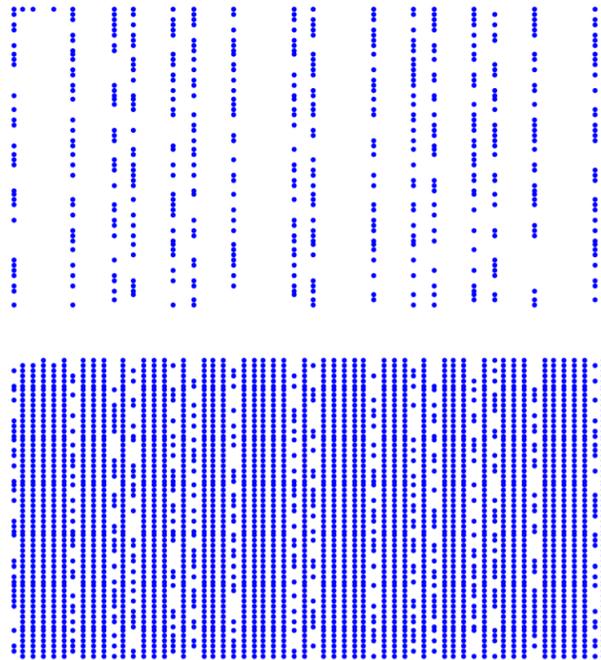


Figure 3 – Fin du spectacle

## Références

- [1] <https://www.szynalski.com/tone-generator>.
- [2] H. Bergson, *Matière et mémoire*, PUF, 1965.
- [3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Hermann, 1951.
- [4] P. Colmez, *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, Ecole polytechnique, 2009.
- [5] Alain Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **62** (1985), 41–144.
- [6] ———, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
- [7] ———, *La géométrie et le quantique*, CNRS Éditions, 2019.
- [8] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, UK edition, 1974.
- [9] J.-P. Kahane et P.-J. Lemarié-Rieusset, *Remarques sur la formule sommatoire de Poisson*, *Studia Mathematica* **109** (1994), no. 3, 303–316.
- [10] J.-M. Nicolas et R. Radeau, *Histoire de la transformée de Mellin*, 2017.
- [11] Tristan Needham, *Visual complex analysis*, Oxford University Press, Inc., 2000.
- [12] R. Penrose, *The road to reality (a complete guide to the laws of the Universe)*, Jonathan Cape London, 2004.
- [13] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, Inc., 1980.
- [14] B. Riemann, *über die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse*, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1859.
- [15] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1987.
- [16] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford university press, 1939.