Le théorème de Brouwer

par le Lemme de Sperner

Christopher

Février 2016

Structure (ou spoiler)

Quel théorème de Brouwer, pourquoi et comment ?

Théorème

La boule unité fermée $\mathbb{B}^n$ d'un espace euclidien possède la propriété du point fixe pour les applications continues.

Pourquoi est-ce intéressant ? :

- C'est un théorème de point fixe qui a pluieurs applications :
  - Nash en théorie des jeux : existence d'un équilibre de Nash
  - Comportement de certaines équations différentielles
  - Fournit une preuve du théorème de séparation de Jordan en dimension n : Le complémentaire de l'image de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ par une application injective continue dans $\mathbb{R}^n$ admet deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non.

Quel théorème de Brouwer, pourquoi et comment ?

Théorème

La boule unité fermée $\mathbb{B}^n$ d'un espace euclidien possède la propriété du point fixe pour les applications continues.

Pourquoi est-ce intéressant ? :

- L'intéret de Brouwer le mène à développer les fondements de la topologie algébrique (approffondit idée de groupe fondamental, imaginé par Poincaré)
- Aujourd'hui : preuve constructive issue de la topologie combinatoire qui utilise les lemmes de Sperner puis des $(n+1)$-fermés (ou KKM : Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz), équivalent au théorème de Brouwer.

Les cas faciles et les généralisations

Cas simplifiés du théorème de Brouwer :

Les cas faciles et les généralisations

Cas simplifiés du théorème de Brouwer :

- En dimension 0...

Les cas faciles et les généralisations

Cas simplifiés du théorème de Brouwer :

- En dimension 0...
- En dimension 1 ce n'est que le théorème des valeurs intermédiaires

Les cas faciles et les généralisations

Cas simplifiés du théorème de Brouwer :

- En dimension 0...
- En dimension 1 ce n'est que le théorème des valeurs intermédiaires
- Si f $1-\mathit{Lipschitzienne}$ sur un compact convexe : se ramener à une suite de fonctions contractantes et appliquer Picard.

Les cas faciles et les généralisations

Cas simplifiés du théorème de Brouwer :

- En dimension 0...
- En dimension 1 ce n'est que le théorème des valeurs intermédiaires
- Si f $1-$*Lipschitzienne* sur un compact convexe : se ramener à une suite de fonctions contractantes et appliquer Picard.
- Si f est holomorphe ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$), on applique Rouché.

Les cas faciles et les généralisations

Généralisations du théorème de Brouwer :

Les cas faciles et les généralisations

Généralisations du théorème de Brouwer :

- Vrai sur un convexe compact non vide d'un espace euclidien (homéomorphe à la boule avec la jauge)

Les cas faciles et les généralisations

Généralisations du théorème de Brouwer :

- Vrai sur un convexe compact non vide d'un espace euclidien (homéomorphe à la boule avec la jauge)
- Schauder : vrai sur K convexe compact non vide d'un EVN. On approxime K par l'enveloppe convexe d'un ϵ - système de précompacité pour se ramener à un simplexe affine et avoir une suite de points fixes approchés.

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

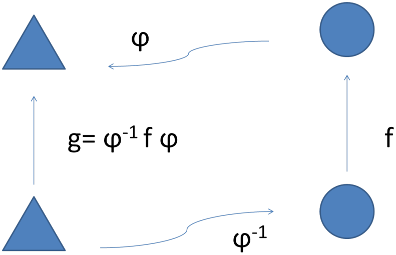


FIGURE: La Propriété du point fixe est topologique : elle a la même valeur sur tout couple d'espaces homéomorphes.

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Au lieu de $\mathbb{B}^n$ on considère un $n-$ *simplexe* de l'espace euclidien (polyèdre affinement libre à $n+1$ sommets).

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Au lieu de $\mathbb{B}^n$ on considère un $n-$*simplexe* de l'espace euclidien (polyèdre affinement libre à $n+1$ sommets).
- Ils sont homéomorphes (et même surement biholomorphes, théorème de représentation conforme en dim 2) en le faisant gonfler.

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Au lieu de $\mathbb{B}^n$ on considère un $n-$ *simplexe* de l'espace euclidien (polyèdre affinement libre à $n+1$ sommets).
- Ils sont homéomorphes (et même surement biholomorphes, théorème de représentation conforme en dim 2) en le faisant gonfler.
- Les simplexes sont des objets que l'on peut manipuler d'un point de vue combinatoire pour obtenir le Lemme de Sperner.

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Au lieu de $\mathbb{B}^n$ on considère un $n -$ *simplexe* de l'espace euclidien (polyèdre affinement libre à $n+1$ sommets).
- Ils sont homéomorphes (et même surement biholomorphes, théorème de représentation conforme en dim 2) en le faisant gonfler.
- Les simplexes sont des objets que l'on peut manipuler d'un point de vue combinatoire pour obtenir le Lemme de Sperner.
- En rajoutant une structure euclidienne on en déduit le :

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

Lemme (KKM)

Soit $\Delta = [x_0, ..., x_n]$ un vrai simplexe affine de $\mathbb{R}^n$ et des fermés $F_0, ..., F_n$ de Δ tels que :

$$\forall \{i_0, ..., i_k\} \subset [0, n], \quad [x_{i_0}, ..., x_{i_k}] \subset F_{i_0} \cup ... \cup F_{i_k}.$$

Alors $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$.

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

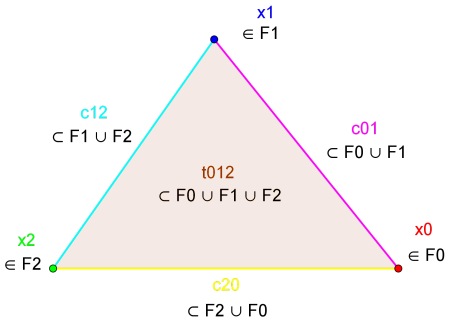


FIGURE: Lemme des 3 fermés pour un triangle

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

Une fois qu'on a KKM, on déduit Brouwer sur les vrais simplexes affines $\Delta = [x_0, ..., x_n]$:

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

Une fois qu'on a KKM, on déduit Brouwer sur les vrais simplexes affines $\Delta = [x_0, ..., x_n]$:

- On ecrit en coordonnées baricentriques ($\sum \lambda_i = \sum \mu_i = 1$), $y = \sum \lambda_i x_i$ et $f(y) = \sum \mu_i x_i$

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

Une fois qu'on a KKM, on déduit Brouwer sur les vrais simplexes affines $\Delta = [x_0, ..., x_n]$:

- On ecrit en coordonnées baricentriques $(\sum \lambda_i = \sum \mu_i = 1)$, $y = \sum \lambda_i x_i$ et $f(y) = \sum \mu_i x_i$
- On pose $F_i = \{y \in \Delta | \lambda_i \geq \mu_i\}$ l'ensemble des y rapprochés de x_i par F.

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

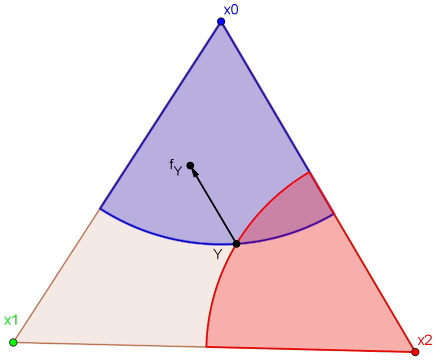


Figure: y est dans F_0 mais pas dans F_2

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Les F_i sont fermés, de plus si y est dans la face $[x_{i_0}, ..., x_{i_k}]$ alors

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Les F_i sont fermés, de plus si y est dans la face $[x_{i_0}, ..., x_{i_k}]$ alors
  - $\lambda_{i_0} + ... + \lambda_{i_k} = 1$ or $\mu_{i_0} + ... + \mu_{i_k} \leq 1$

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Les F_i sont fermés, de plus si y est dans la face $[x_{i_0}, ..., x_{i_k}]$ alors
  - $\lambda_{i_0} + ... + \lambda_{i_k} = 1$ or $\mu_{i_0} + ... + \mu_{i_k} \leq 1$
  - donc $\mu_{i_j} \leq \lambda_{i_j}$ pour un certain $j \in \{0, ...k\}$

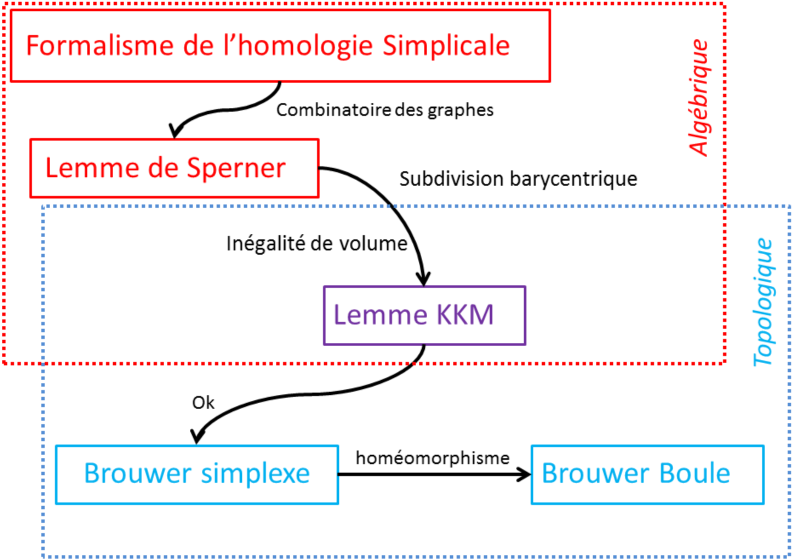
Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Les F_i sont fermés, de plus si y est dans la face $[x_{i_0}, ..., x_{i_k}]$ alors
  - $\lambda_{i_0} + ... + \lambda_{i_k} = 1$ or $\mu_{i_0} + ... + \mu_{i_k} \leq 1$
  - donc $\mu_{i_j} \leq \lambda_{i_j}$ pour un certain $j \in \{0, ...k\}$
  - c'est à dire $y \in F_{i_j}$ et vérifient la condition KKM

Simpl(ex)ification du problème et schéma de la preuve

- Les F_i sont fermés, de plus si y est dans la face $[x_{i_0}, ..., x_{i_k}]$ alors
  - $\lambda_{i_0} + ... + \lambda_{i_k} = 1$ or $\mu_{i_0} + ... + \mu_{i_k} \leq 1$
  - donc $\mu_{i_j} \leq \lambda_{i_j}$ pour un certain $j \in \{0, ...k\}$
  - c'est à dire $y \in F_{i_j}$ et vérifient la condition KKM
- L'intersection des F_i est donc non vide et tous ses points sont fixes par f.

Organigramme de la preuve



Chaines et Simplexes

Definition

Chaîne sur un ensemble X : $c \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_f \backslash \{\emptyset\})$
Ses sommets : $S(c) = \bigcup_{p \in c} p$

Par exemple sur $X = \mathbb{N}$:

Chaines et Simplexes

Definition

Chaîne sur un ensemble X : $c \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_f \backslash \{\emptyset\})$
Ses sommets : $S(c) = \bigcup_{p \in c} p$

Par exemple sur $X = \mathbb{N}$:

- $c_0 = \emptyset, \quad S(c_0) = \emptyset$

Chaines et Simplexes

Definition

Chaîne sur un ensemble X : $c \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_f \backslash \{\emptyset\})$
Ses sommets : $S(c) = \bigcup_{p \in c} p$

Par exemple sur $X = \mathbb{N}$:

- $c_0 = \emptyset, \quad S(c_0) = \emptyset$
- $c_1 = \{\{2\}, \{3,5\}, \{2,11,31\}\}, \quad S(c_1) = \{2,3,11,31\}$

Chaines et Simplexes

Definition

Chaîne sur un ensemble X : $c \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_f \backslash \{\emptyset\})$
Ses sommets : $S(c) = \bigcup_{p \in c} p$

Par exemple sur $X = \mathbb{N}$:

- $c_0 = \emptyset, \quad S(c_0) = \emptyset$
- $c_1 = \{\{2\}, \{3, 5\}, \{2, 11, 31\}\}, \quad S(c_1) = \{2, 3, 11, 31\}$
- Mais $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$ et $\{\{k, k+1\} | k \in \mathbb{N}\}$ ne sont pas des chaînes

Chaines et Simplexes

On note $+$ la différence symétrique entre deux chaînes. C'est une loi de groupe abélien sur $\mathcal{C}(X)$ et $\forall c,\ c + c = \emptyset$.

Proposition

$(\mathcal{C}(X), +)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel.
Base $\mathfrak{S}(X)$ des chaînes à un élément appelées simplexes.
$\langle x_0, \cdots, x_n \rangle = \{\{x_0, \cdots, x_n\}\}$ est un n-simplexe de X lorsque les x_i sont distincts, et il vaut 0 sinon.

Exemple : $c_1 = \underbrace{\langle 2 \rangle}_{0-simplexe} + \underbrace{\langle 3, 5 \rangle}_{1-simplexe} + \underbrace{\langle 2, 3, 11, 31 \rangle}_{3-simplexe}$

Chaines et Simplexes

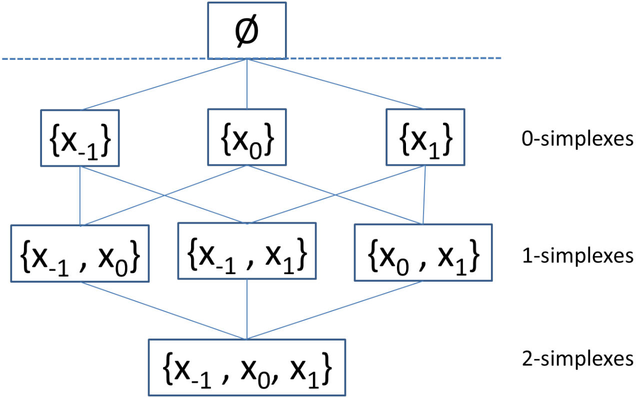


FIGURE: Penser les chaînes combinatoirement

Chaines et Simplexes

- Chaîne : choix d'un nombre fini de boites dans le treilli des parties (finies non vides) de X.

Chaines et Simplexes

- Chaîne : choix d'un nombre fini de boites dans le treilli des parties (finies non vides) de X.
- Les $n-simplexes$ sont sur la ligne $n+1$ et engendrent le sous-espace vectoriel des $n-chaînes$.

Chaines et Simplexes

- Chaîne : choix d'un nombre fini de boites dans le treilli des parties (finies non vides) de X.
- Les $n - simplexes$ sont sur la ligne $n + 1$ et engendrent le sous-espace vectoriel des $n - cha\hat{\imath}nes$.
- L'ensemble des sommets est l'union de tous les ensembles choisis.

Chaines et Simplexes

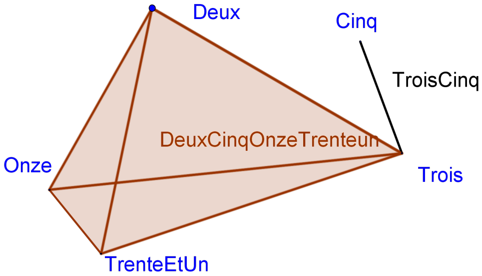


FIGURE: Penser les chaînes géométriquement :
$c_1 = \langle 2 \rangle + \langle 3, 5 \rangle + \langle 2, 3, 11, 31 \rangle$

Chaines et Simplexes

- Chaîne : ensemble fini de figures géométriques de dimension 0,1,2,...

Chaines et Simplexes

- Chaîne : ensemble fini de figures géométriques de dimension 0,1,2,...
- Les $n - simplexes$ sont les figures de dimension n (d'où l'appellation).

Chaines et Simplexes

- Chaîne : ensemble fini de figures géométriques de dimension 0,1,2,...
- Les $n - simplexes$ sont les figures de dimension n (d'où l'appellation).
- Une $2 - cha\hat{i}ne$ est une ensemble fini de triangles non dégénérés.

Chaines et Simplexes

- Chaîne : ensemble fini de figures géométriques de dimension 0,1,2,...
- Les $n-$ *simplexes* sont les figures de dimension n (d'où l'appellation).
- Une $2-$ *chaîne* est une ensemble fini de triangles non dégénérés.
- Sommets d'une chaine : ensemble des sommets des figures géométriques.

Opération bord

Définition

On construit l'endomorphisme bord ∂ de $\mathcal{C}(X)$ en le définissant sur la base des simplexes :
Si $\lambda = \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$, on pose :

$$\partial\lambda = \sum_{i=0}^{n} \langle x_0, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n \rangle$$

Opération bord

Définition

On construit l'endomorphisme bord ∂ de $\mathcal{C}(X)$ en le définissant sur la base des simplexes :
Si $\lambda = \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$, on pose :

$$\partial \lambda = \sum_{i=0}^{n} \langle x_0, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n \rangle$$

L'opérateur ∂ s'étend à l'espace des chaines par linéarité :
$\partial(\langle 1,2,3 \rangle + \langle 2,3,4 \rangle) = \langle 1,2 \rangle + \langle 1,3 \rangle + \langle 2,4 \rangle + \langle 3,4 \rangle$

Le segment $\langle 2,3 \rangle$ est compté deux fois (caractéristique deux !)

Opération bord

Observations :

- Combinatoirement il remplace chaque boite par la somme des ses parents immédiats (simplifications...)

Opération bord

Observations :

- Combinatoirement il remplace chaque boite par la somme des ses parents immédiats (simplifications...)
- Dans la vision géométrique il remplace :
  - un tétraèdre par la somme de ses faces triangulaires

Opération bord

Observations :

- Combinatoirement il remplace chaque boite par la somme des ses parents immédiats (simplifications...)
- Dans la vision géométrique il remplace :
  - un tétraèdre par la somme de ses faces triangulaires
  - un triangle par la somme de ses arêtes

Opération bord

Observations :

- Combinatoirement il remplace chaque boite par la somme des ses parents immédiats (simplifications...)
- Dans la vision géométrique il remplace :
  - un tétraèdre par la somme de ses faces triangulaires
  - un triangle par la somme de ses arêtes
  - une arête par la somme de ses extremités

Opération bord

Observations :

- Combinatoirement il remplace chaque boite par la somme des ses parents immédiats (simplifications...)
- Dans la vision géométrique il remplace :
  - un tétraèdre par la somme de ses faces triangulaires
  - un triangle par la somme de ses arêtes
  - une arête par la somme de ses extremités
- ∂ envoie le sous-espace des $n+1$-chaînes dans celui des n-chaînes.

Opération bord

Observations :

- Combinatoirement il remplace chaque boite par la somme des ses parents immédiats (simplifications...)
- Dans la vision géométrique il remplace :
  - un tétraèdre par la somme de ses faces triangulaires
  - un triangle par la somme de ses arêtes
  - une arête par la somme de ses extremités
- ∂ envoie le sous-espace des $n+1$-chaînes dans celui des n-chaînes.
- Il est de carré nul : $\partial^2 = 0$.

Extension depuis un sommet

Définition

On définit l'opérateur d'extension depuis le sommet $a \in X$, φ_a par :

$$\varphi_a : \langle x_0, \cdots, x_n \rangle \mapsto \langle a, x_0, \cdots, x_n \rangle$$

Extension depuis un sommet

Définition

On définit l'opérateur d'extension depuis le sommet $a \in X$, φ_a par :

$$\varphi_a : \langle x_0, \cdots, x_n \rangle \mapsto \langle a, x_0, \cdots, x_n \rangle$$

Remarques :

- φ_a envoie le sous-espace des n-chaînes dans celui des $(n+1)$-chaînes
- Géométrico-combinatoirement, remplace la n-clique $\{x_1, \cdots, x_n\}$ par la $n+1$-clique $\{a, \cdots, x_n\}$.
- φ_a remplace le trianle uvw par le tétraèdre auvw.

Applications linéaires induites

Définition

Si $f : X \to Y$ est une application, l'application linéaire induite $\tilde{f} : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ est définit sur les simplexes par :

$$\tilde{f} : \langle x_0, \cdots, x_n \rangle \mapsto \langle f(x_0), \cdots, f(x_n) \rangle$$

Applications linéaires induites

Définition

Si $f : X \to Y$ est une application, l'application linéaire induite $\tilde{f} : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ est définit sur les simplexes par :

$$\tilde{f} : \langle x_0, \cdots, x_n \rangle \mapsto \langle f(x_0), \cdots, f(x_n) \rangle$$

Remarques :

- Si f injective sur $S(\lambda)$ alors $\tilde{f}(\lambda)$ est le n-simplexe de sommets $f(S(\lambda))$ sinon 0.
- $\forall c \in \mathcal{C}(X), \quad \partial \tilde{f}(c) = \tilde{f}(\partial c)$ (vrai sur $\mathfrak{S}(X)$, linéarité...)

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Définition

Désormais $X = E$*, espace vectoriel normé par* $\|.\|$ *de dimension* n*.*
On définit par récurrence l'endomorphisme σ *de* $\mathcal{C}(E)$ *:*

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Définition

Désormais $X = E$*, espace vectoriel normé par* $\|.\|$ *de dimension* n*.*
On définit par récurrence l'endomorphisme σ *de* $\mathcal{C}(E)$ *:*

- *Si* $\lambda = \langle x_0 \rangle$ *est un* 0*-simplexe,* $\sigma(\lambda) = \lambda$*.*

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Définition

Désormais $X = E$, espace vectoriel normé par $\|.\|$ de dimension n. On définit par récurrence l'endomorphisme σ de $\mathcal{C}(E)$:

- *Si $\lambda = \langle x_0 \rangle$ est un 0-simplexe, $\sigma(\lambda) = \lambda$.*
- *Si $\lambda = \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$ est un n-simplexe,*

$$\sigma(\lambda) = \left\langle \frac{x_0 + \cdots + x_n}{n+1}, \sigma(\partial\lambda) \right\rangle$$

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$
- Si λ est un n-simplexe, $\sigma(\lambda)$ est la somme de $(n+1)!$ n-simplexes de la forme $\langle b_{n+1}, \cdots, b_1\rangle$ où b_k est le baricentre de k points x_i. Cela se voit dans la récurrence :

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$
- Si λ est un n-simplexe, $\sigma(\lambda)$ est la somme de $(n+1)!$ n-simplexes de la forme $\langle b_{n+1}, \cdots, b_1\rangle$ où b_k est le baricentre de k points x_i. Cela se voit dans la récurrence :
  - le premier point est le baricentre de tous les x_i

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$
- Si λ est un n-simplexe, $\sigma(\lambda)$ est la somme de $(n+1)!$ n-simplexes de la forme $\langle b_{n+1}, \cdots, b_1 \rangle$ où b_k est le baricentre de k points x_i. Cela se voit dans la récurrence :
  - le premier point est le baricentre de tous les x_i
  - puis viendra un baricentre de poids n (on élimine un des $(n+1)$ sommets pour se projeter au centre de la face opposée)

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$
- Si λ est un n-simplexe, $\sigma(\lambda)$ est la somme de $(n+1)!$ n-simplexes de la forme $\langle b_{n+1}, \cdots, b_1 \rangle$ où b_k est le baricentre de k points x_i. Cela se voit dans la récurrence :
  - le premier point est le baricentre de tous les x_i
  - puis viendra un baricentre de poids n (on élimine un des $(n+1)$ sommets pour se projeter au centre de la face opposée)
  - et ainsi de suite... jusqu'à arriver au baricentre d'un segment et au choix de l'une des extrêmités

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$
- Si λ est un n-simplexe, $\sigma(\lambda)$ est la somme de $(n+1)!$ n-simplexes de la forme $\langle b_{n+1}, \cdots, b_1 \rangle$ où b_k est le baricentre de k points x_i. Cela se voit dans la récurrence :
  - le premier point est le baricentre de tous les x_i
  - puis viendra un baricentre de poids n (on élimine un des $(n+1)$ sommets pour se projeter au centre de la face opposée)
  - et ainsi de suite... jusqu'à arriver au baricentre d'un segment et au choix de l'une des extrêmités
  - $1 * (n+1) * n * \cdots * 3 * 2 = (n+1)!$

Subdivision barycentrique, introduction du concept

Remarques :

- $\partial\lambda$ est une $(n-1)$-chaîne donc définission récursive cohérente
- σ est ainsi définie sur la base $\mathfrak{S}(X)$
- Si λ est un n-simplexe, $\sigma(\lambda)$ est la somme de $(n+1)!$ n-simplexes de la forme $\langle b_{n+1}, \cdots, b_1\rangle$ où b_k est le baricentre de k points x_i. Cela se voit dans la récurrence :
  - le premier point est le baricentre de tous les x_i
  - puis viendra un baricentre de poids n (on élimine un des $(n+1)$ sommets pour se projeter au centre de la face opposée)
  - et ainsi de suite... jusqu'à arriver au baricentre d'un segment et au choix de l'une des extrêmités
  - $1*(n+1)*n*\cdots*3*2=(n+1)!$
- Et en image(s) ?

Subdivision barycentrique, en images

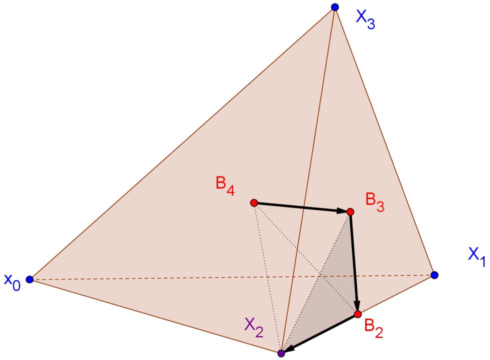


FIGURE: Récurrence dans la subdivision barycentrique

Subdivision barycentrique, en images

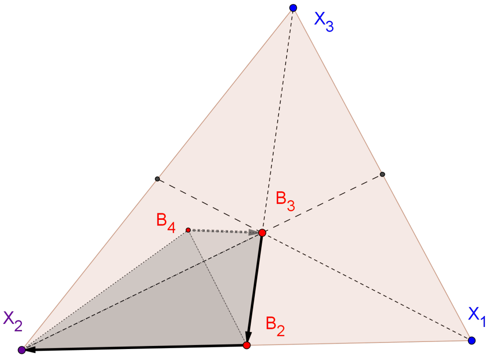


FIGURE: σ décompose le n-symplexe en *cellules* : $(n+1)!$ n-symplexes

Subdivision barycentrique, un lemme essentiel

Définition

On définit une norme sur l'espace des chaînes qui est pratique pour les calculs :

Subdivision barycentrique, un lemme essentiel

Définition

On définit une norme sur l'espace des chaînes qui est pratique pour les calculs :

- *Support d'un simplexe :* $[x_0, \cdots, x_n] = Conv\{x_0, \cdots, x_n\}$
- *Support d'une chaîne : l'union des supports des simplexes qui le constituent.*

Subdivision barycentrique, un lemme essentiel

Définition

On définit une norme sur l'espace des chaînes qui est pratique pour les calculs :

- *Support d'un simplexe :* $[x_0, \cdots, x_n] = Conv\{x_0, \cdots, x_n\}$
- *Support d'une chaîne : l'union des supports des simplexes qui le constituent.*
- *Norme simplexe :* $|\lambda| = diam[x_0, \cdots, x_n]$ *(au sens de* $\|.\|$*)*
- *Norme d'une chaîne : norme maximale des simplexes qui la constituent.*

Subdivision barycentrique, un lemme essentiel

Définition

On définit une norme sur l'espace des chaînes qui est pratique pour les calculs :

- *Support d'un simplexe :* $[x_0, \cdots, x_n] = Conv\{x_0, \cdots, x_n\}$
- *Support d'une chaîne : l'union des supports des simplexes qui le constituent.*
- *Norme simplexe :* $|\lambda| = diam[x_0, \cdots, x_n]$ *(au sens de* $\|.\|$*)*
- *Norme d'une chaîne : norme maximale des simplexes qui la constituent.*
- *C'est une norme ultramétrique sur l'espace* $\mathcal{C}(E)$
- ∂ *est* 1*-lipschitzienne pour* $|.|$.

Subdivision barycentrique, un lemme essentiel

Proposition

Le caractère non-archémédien de la norme permet de montrer par récurrence que :

$$\forall c \in \mathcal{C}_n(E), \quad |\sigma(c)| \leq \frac{n}{n+1}|c|$$

Simplexes numérotés (ou coloriés)

Définition

$\lambda \in \mathfrak{S}(X)$ est bien numéroté par $f : X \to \{x_0, \cdots, x_n\}$ si f est injective sur $S(\lambda)$.
C'est à dire si la coloration f attribue à ses sommets des couleurs toutes distinctes.

Dans ce cas, $\tilde{f}(\lambda) = \langle 0, \cdots, n \rangle$, et sinon $\tilde{f}(\lambda) = 0$.

Simplexes numérotés (ou coloriés)

Proposition

Soit la n-chaîne $A \in \mathcal{C}_n(X)$, $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ *somme de n-simplexes. On a*

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{f}(\lambda_i)$$

Donc $\tilde{f}(A) = \langle 0, \cdots, n \rangle$ *s'il y a un nombre pair de* λ_i *bien numérotés et 0 sinon.*

Lemme de Sperner

Lemme (Sperner)

Soient $x_0, \cdots, x_n \in E$ *affinements indépendants,* $k \in \mathbb{N}$ *et* $A = \sigma^k(\langle x_0, \cdots, x_n \rangle)$.

Soit $f : S(A) \to \{x_0, \cdots, x_n\}$ *une numérotation de Sperner :*

- *Si* $y \in [x_{i_0}, \cdots, x_{i_p}]$, *alors* $f(y) \in [i_0, \cdots, i_p]$ *(donc* $f(x_i) = i$*)*
- *Sinon* $f(y)$ *est un entier quelconque de* $\{x_0, \cdots, x_n\}$

Lemme de Sperner

Lemme (Sperner)

Soient $x_0, \cdots, x_n \in E$ affinements indépendants, $k \in \mathbb{N}$ et $A = \sigma^k(\langle x_0, \cdots, x_n \rangle)$.

Soit $f : S(A) \to \{x_0, \cdots, x_n\}$ une numérotation de Sperner :

- *Si $y \in [x_{i_0}, \cdots, x_{i_p}]$, alors $f(y) \in [i_0, \cdots, i_p]$ (donc $f(x_i) = i$)*
- *Sinon $f(y)$ est un entier quelconque de $\{x_0, \cdots, x_n\}$*

Alors il y a un nombre impair de n-simplexes dans A qui sont bien numérotés par f.
En particulier il y en a au moins un.

Lemme de Sperner

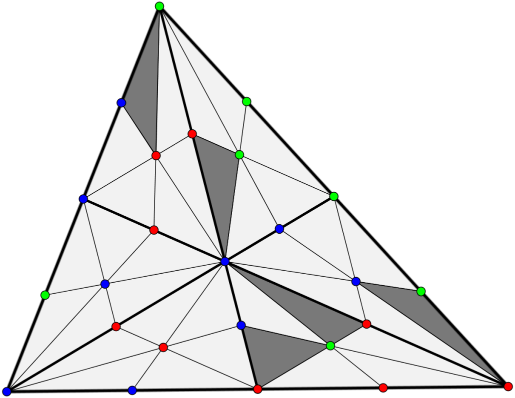


FIGURE: Coloriage de Sperner de $A = \sigma^2(\langle R, V, B \rangle)$

Lemme de Sperner

Remarques :

- La preuve résulte d'un calcul, par récurrence sur n, de $\tilde{f}(A)$. On utilise HR en diminuant n grâce :

Lemme de Sperner

Remarques :

- La preuve résulte d'un calcul, par récurrence sur n, de $\tilde{f}(A)$. On utilise HR en diminuant n grâce :
  - La commutativité de ∂ avec $\tilde{f}$ et σ
  - Le fait que l'espace des n-chaînes est stable par σ

Lemme de Sperner

Remarques :

- La preuve résulte d'un calcul, par récurrence sur n, de $\tilde{f}(A)$.
  On utilise HR en diminuant n grâce :
  - La commutativité de ∂ avec $\tilde{f}$ et σ
  - Le fait que l'espace des n-chaînes est stable par σ
- Elle est purement combinatoire.

Lemme de Sperner

Remarques :

- La preuve résulte d'un calcul, par récurrence sur n, de $\tilde{f}(A)$. On utilise HR en diminuant n grâce :
  - La commutativité de ∂ avec $\tilde{f}$ et σ
  - Le fait que l'espace des n-chaînes est stable par σ
- Elle est purement combinatoire.
- Prouver l'existence d'une certaine structure maximale, en montrant qu'elle sont au nombre de 1 $(mod 2)$ fait penser aux théorèmes de Sylows et à sa généralisations par Frobenius.

Lemme KKM

Lemme (KKM)

Soit $\Delta = [x_0, \ldots, x_n]$ *un vrai simplexe affine de* $\mathbb{R}^n$ *et des fermés* $F_0, \ldots, F_n$ *de* Δ *tels que :*

$$\forall \{i_0, \ldots, i_k\} \subset [0, n], \quad [x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}] \subset F_{i_0} \cup \ldots \cup F_{i_k}.$$

Alors $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$.

Lemme KKM

En voici une preuve dans ses grandes lignes :

Lemme KKM

En voici une preuve dans ses grandes lignes :

- On subdivise le simplexe en des cellules barycentriques de module inféreures à ϵ (grâce au lemme essentiel)

Lemme KKM

En voici une preuve dans ses grandes lignes :

- On subdivise le simplexe en des cellules barycentriques de module inféreures à ϵ (grâce au lemme essentiel)
- On Sperner-numérote ses sommets avec la condition suplémentaire $f(x_i) \in \{k | x_i \in F_k\}$

Lemme KKM

En voici une preuve dans ses grandes lignes :

- On subdivise le simplexe en des cellules barycentriques de module inféreures à ϵ (grâce au lemme essentiel)
- On Sperner-numérote ses sommets avec la condition suplémentaire $f(x_i) \in \{k | x_i \in F_k\}$
- Il existe une cellule bien numérotée et tous ses points sont donc à distance inférieure à tous les fermés.

Lemme KKM

En voici une preuve dans ses grandes lignes :

- On subdivise le simplexe en des cellules barycentriques de module inféreures à ϵ (grâce au lemme essentiel)
- On Sperner-numérote ses sommets avec la condition suplémentaire $f(x_i) \in \{k | x_i \in F_k\}$
- Il existe une cellule bien numérotée et tous ses points sont donc à distance inférieure à tous les fermés.
- $z \mapsto \underset{i \leq n}{max} d(z, F_i)$ continue sur compact Δ, elle atteint son minimum : 0.

Et après ?

Voici une application dûe à Monsky à laquelle vous pourrez réfléchir pendant l'apéro :

Et après ?

Voici une application dûe à Monsky à laquelle vous pourrez réfléchir pendant l'apéro :

Un carré ne peut être divisé en un nombre impair de triangles de même aire.

Et après ?

Voici une application dûe à Monsky à laquelle vous pourrez réfléchir pendant l'apéro :

Un carré ne peut être divisé en un nombre impair de triangles de même aire.

Références : Wkipédia et un article d'une revue de la RMS de H. Pépin (1997)