# Combinatoire des singularités algébriques réelles

## Énumération des buissons et des diagrammes analytiques

Christopher-Lloyd Simon

Départment de mathématiques
ENS Lyon

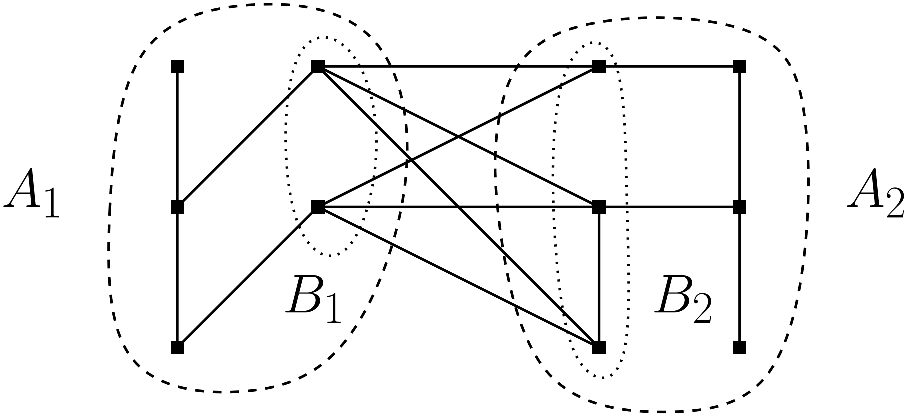
Vendredi 14 Décembre 2018

# Sommaire

# Sommaire

# Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

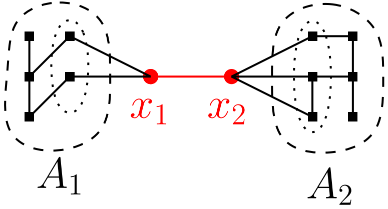
Dans un graphe connexe, on définit une décomposition $(A_1, A_2)$ :

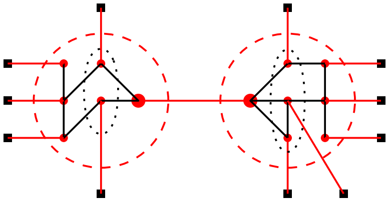



On demande $|A_k| > 1$.

# Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

On la factorise avec des sommets de contrôle :

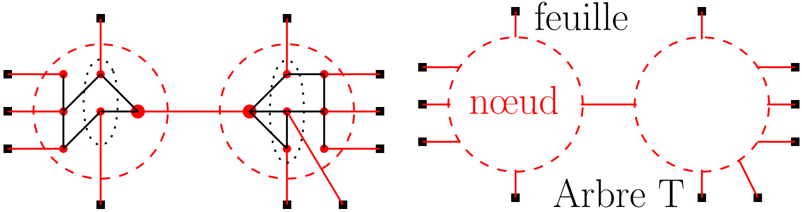


On a un arbre-de-graphes. Nœuds *internes* induits par $A_k \cup \{x_k\}$. On continue jusqu'à ce que les nœuds soient *indécomposables* ou *dégénérés*.

# Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

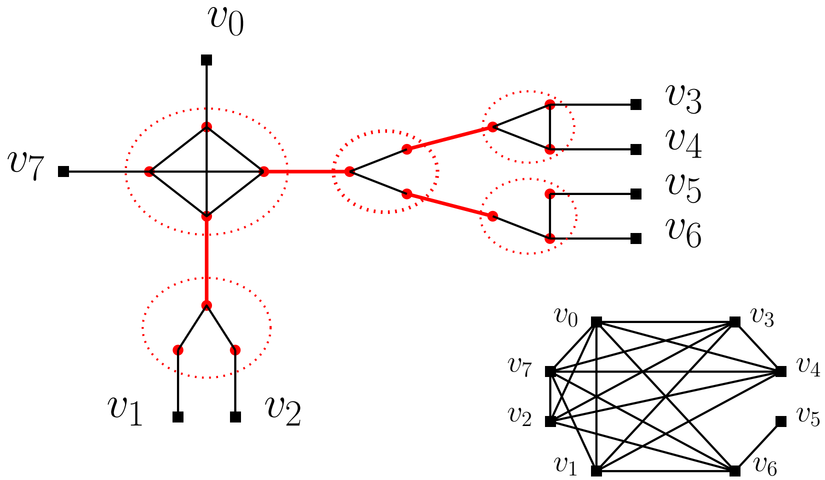
On la factorise avec des sommets de contrôle :




On a un arbre-de-graphes. Nœuds *internes* induits par $A_k \cup \{x_k\}$. On continue jusqu'à ce que les nœuds soient *indécomposables* ou *dégénérés*.

# Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

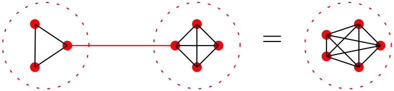
Cela peut ressembler à :

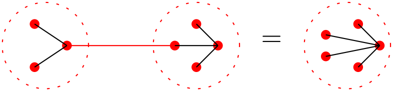



Ici tous les sommets sont dégénérés : star-clique.

# Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

L'arbre-de-graphes est *réduit* si pas de clique-join ou star-join :



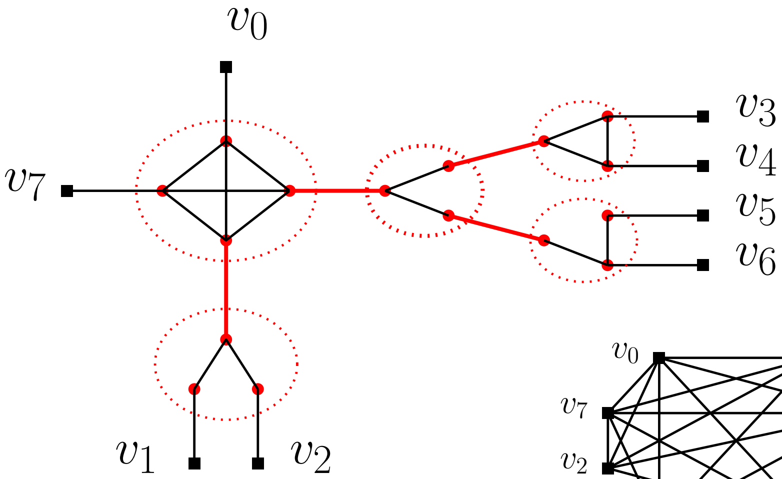


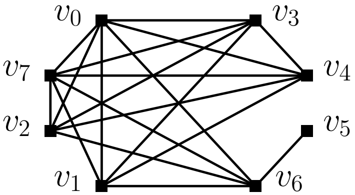
**Théorème (Cunningham, Gioan-Paul)**

*Tout graphe admet une unique décomposition en arbre-de-graphes réduits.*

# Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

Réciproquement on récupère le *graphe d'accessibilité des feuilles* :



# Buisson : arbre-de-graphes-dégénérés réduit

## Corollaire (de la décomposition de Cunningham)

*Un buisson connexe ayant au moins trois sommets est le graphe d'accessibilité d'un unique arbre-de-graphes-dégénérés réduit, et réciproquement. Désormais on pense aux buissons comme SK-arbres.*

## Démonstration.

- Tout sous-graphe induit d'un buisson est un buisson (caractérisation distance-héréditaire).
- Or les graphes aux nœuds d'un arbre de-graphes sont induits dans le graphe d'accessibilité de ses feuilles.
- Un graphe indécomposable n'est pas un buisson donc un buisson se factorise nécessairement en un SK-arbre.

□

# Buisson : arbre-de-graphes-dégénérés réduit

## Corollaire (de la décomposition de Cunningham)

*Un buisson connexe ayant au moins trois sommets est le graphe d'accessibilité d'un unique arbre-de-graphes-dégénérés réduit, et réciproquement. Désormais on pense aux buissons comme SK-arbres.*

## Démonstration.

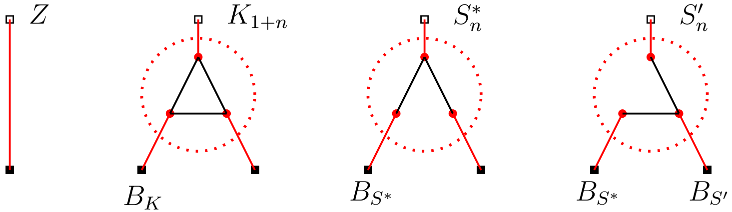
- Tout sous-graphe induit d'un buisson est un buisson (caractérisation distance-héréditaire).
- Or les graphes aux nœuds d'un arbre de-graphes sont induits dans le graphe d'accessibilité de ses feuilles.
- Un graphe indécomposable n'est pas un buisson donc un buisson se factorise nécessairement en un SK-arbre.
- Réciproquement : un SK-arbre a un sommet pendant ou des jumeaux. La simplification préserve la propriété d'être un SK-arbre. On itère.

□

# Buissons : grammaire génératrice inambigüe

## Grammaire génératrice inambigüe (structure d'opérade)

On enracine les buissons en une feuille, on étiquette les feuilles, on compose en branchant racines des enfants sur feuilles des parents.



# Énumération des buissons connexes étiquetés

## Système pour les buissons connexes étiquetés

$$B(z) = \frac{1}{2}\left(B_K(z) + B_{S^*}(z) + B_{S'}(z) - z\right)$$

$$B_K(z) = z + \sum_{n>1} \frac{B_{S^*}(z)^n}{n!} + \sum_{n>1} B_{S'}(z)\frac{B_{S^*}(z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$B_{S^*}(z) = z + \sum_{n>1} \frac{B_K(z)^n}{n!} + \sum_{n>1} B_{S'}(z)\frac{B_{S^*}(z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$B_{S'}(z) = z + \sum_{n>1} \frac{B_K(z)^n}{n!} + \sum_{n>1} \frac{B_{S^*}(z)^n}{n!}$$

On calcule $B_K = z + f(B_K)$ où $f(w) = 2\exp(w) + \exp(-w) - w - 3$.
« Smooth implicit-function schéma » Flajolet-Sedgewick (Thm. VII.3).

# Énumération des buissons connexes étiquetés

**Proposition (2018 : Série des buissons connexes étiquetés)**

*Le nombre $B_n$ de buissons connexes enracinés étiquetés de taille $n$ équivaut*

$$\frac{b}{2\sqrt{\pi n^3}}.\beta^{-n}.n!$$

$\beta = 2\sqrt{3} - 1 + 2\log\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ *vérifie* $6 < \beta^{-1} < 7$ *et* $b = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{3}}}$. *Premiers termes de la suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

0, 1, 4, 38, 596, 13072, 368488, 12693536,
516718112, 24268858144, 1291777104256,
76845808729472, 5052555752407424

# Comprendre les buissons connexes non étiquetés ?

## Remarque (Buissons non étiquetés et automorphismes)

*Pour déduire une asymptotique du nombre de buissons non étiquetés il faudrait connaître la taille typique de leurs groupes d'automorphismes.*

- *Essayer de pondérer les séries par les cardinaux des groupes.*
- *Etudier la forme typique d'un SK-arbre et la distribution des degrés des sommets pour décomposer les symétries d'un buisson.*

# Comprendre les buissons connexes non étiquetés ?

## Remarque (Buissons non étiquetés et automorphismes)

*Pour déduire une asymptotique du nombre de buissons non étiquetés il faudrait connaître la taille typique de leurs groupes d'automorphismes.*

- *Essayer de pondérer les séries par les cardinaux des groupes.*
- *Etudier la forme typique d'un SK-arbre et la distribution des degrés des sommets pour décomposer les symétries d'un buisson.*
  - *Tentative à préciser...*

# Comprendre les buissons connexes non étiquetés ?

## Remarque (Buissons non étiquetés et automorphismes)

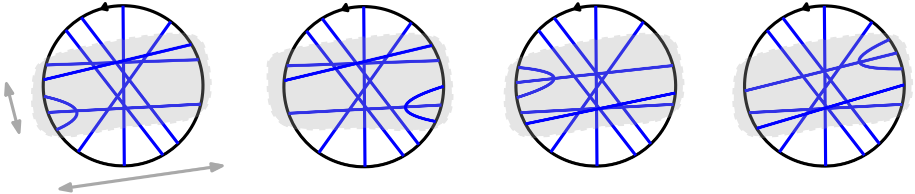
*Pour déduire une asymptotique du nombre de buissons non étiquetés il faudrait connaître la taille typique de leurs groupes d'automorphismes.*

- *Essayer de pondérer les séries par les cardinaux des groupes.*
- *Etudier la forme typique d'un SK-arbre et la distribution des degrés des sommets pour décomposer les symétries d'un buisson.*
  - *Une symétrie du graphe en induit une sur le SK-arbre*
  - *Souvent les nœuds internes sont presque tous fixés.*
  - *Il reste à permuter les feuilles : on obtient environ un produit de $k_j!$ où les $k_j$ sont les tailles des paquets de feuilles attachés à un même nœuds.*

# Sommaire

# Opérade sur les diagrammes analytiques connexes marqués

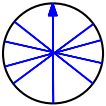
- Relever la factorisation en SK-arbres des buissons (connexes, non étiquetés mais enracinés) aux diagrammes connexes enracinés.
- Attention : à un buisson correspond plusieurs diagrammes de cordes. Ils diffèrent précisément par une série de mutations :



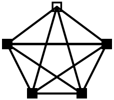
- Un diagramme enraciné possède une gauche et une droite.
- Un arbre enraciné induit un ordre partiel sur ses nœuds.

# Opérade sur les diagrammes analytiques connexes marqués

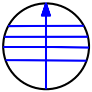
On décore les nœuds internes d'un arbre par les diagrammes :



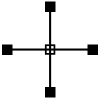
$T_4$



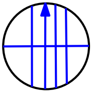
$K_5$



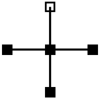
$D_4^*$



$S_4^*$

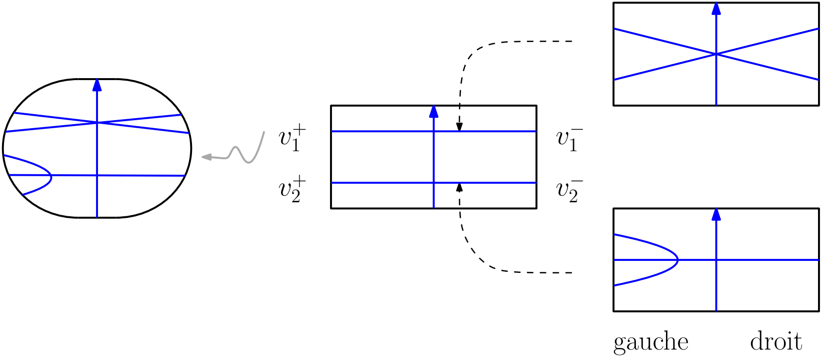


$D'_{1,2}$



$S'_4$

Enraciné, non étiqueté. Retenir gauche et droite lors de l'insertion.



# Grammaire inambigüe

## Lemme (2018)

*Chaque diagramme analytique enraciné connexe est ainsi engendré, et ce de manière unique.*

## Équations pour la grammaire des diagrammes connexes

$$C(z) = \frac{1}{2}\left(C_T + C_{D^*} + C_{D'}\right)$$

$$C_T(z) = z + \sum_{n>1} C_{D^*}^n + \sum_{k+l>0} C_{D'} C_{D^*}^{k+l}$$

$$C_{D^*}(z) = z + \sum_{n>1} C_T^n + \sum_{k+l>0} C_{D'} C_{D^*}^{k+l}$$

$$C_{D'}(z) = z + \sum_{n>1} C_{D^*}^n + \sum_{n>1} C_T^n$$

# Diagrammes analytiques linéaires connexes

Algébricité de la série génératrice, Asymptotique, Formule close

## Proposition (2018)

*Algébricité de la série :* $2C^3 + (z+2)C^2 + (2z-1)C + z = 0$.

*Asymptotique :* $C_n \sim c_0\, n^{-\frac{3}{2}}\, \gamma^{-n}$ *avec* $13 < \gamma^{-1} < 14$ *:*

$$\gamma = \frac{1}{12}\left(49 - \frac{433}{\sqrt[3]{24407 - 1272\sqrt{318}}} - \sqrt[3]{24407 - 1272\sqrt{318}}\right)$$

*Formule par inversion de Lagrange :*

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1+k}{n-1}\binom{2n+k}{n-1-k}2^k$$

*Premiers termes de la suite* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

$1, 4, 27, 226, 2116, 21218, 222851, 2420134, 26954622, 306203536.$

# Grammaire algébrique et développement asymptotique.

**Remarque (Grammaire acontextuelle : règles de subtitution)**

- $S \longrightarrow \quad z \mid T_1 \mid D_1^* \mid D_1'$
- $T_1 \longrightarrow \quad z \mid t_l D^* D^* t_r \mid t_l D^* D' t_r \mid t_l D' D' t_r$
- $T \longrightarrow \quad z \mid t_l D^* D^* t_r \mid t_l D^* D' t_r \mid t_l D' D' t_r \mid TT$
- $D_1^* \longrightarrow \quad z \mid d_l^* TT d_r^* \mid d_l^* TD' d_r^* \mid d_l^* D' D' d_r^*$
- $D^* \longrightarrow \quad z \mid d_l^* TT d_r^* \mid d_l^* TD' d_r^* \mid d_l^* D' D' d_r^* \mid D^* D^*$
- $D_1' \longrightarrow \quad z \mid d_l' L d_m' M d_n' R d_r' \quad (\forall M \in \{T_1, D^*\}, \forall L, R \in \{T, D'\})$
- $D' \longrightarrow \quad z \mid d_l' L d_m' M d_n' R d_r' \mid D' D' \quad (\forall M, \forall L, R)$

*Indices* 1 *distinguent les emplacements où la lettre ne peut être dupliquée : au nœud racine ainsi que dans la corde de* $D'$ *intersectant la corde racine.*

# Grammaire algébrique et développement asymptotique.

## Remarque (Développement asyptotique des coefficients)

*Le théorème de Drmota-Lalley-Woods (F.-S. VII.6) prévoit un développement asymptotique complet des $C_n$ de la forme suivante :*

$$\gamma^{-n} n^{-\frac{3}{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \, n^{-k} \right).$$

*Le développement de l'équation sur $C$ au voisinage du point critique permettrait de calculer les $c_k$.*

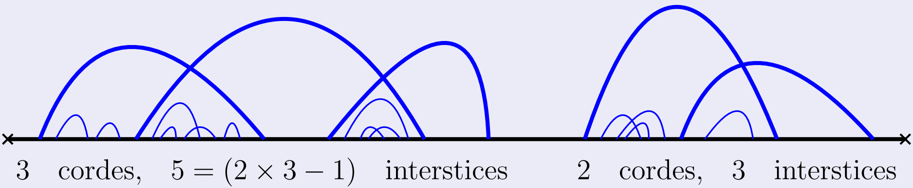
# Diagrammes analytiques linéaires

## Algébricité de la série génératrice, Asymptotique

### Lemme (2018)

*Les séries génératrices $A$ et $C$ sont liées par l'équation* $A = 1 + zA^2 + zA^2\, C(zA^2)$.

### Idée de la preuve



## Théorème (2018 : diagrammes analytiques linéaires)

*La série génératrice des diagrammes analytiques est algébrique :*

$$(z^3 + z^2)A^6 - z^2A^5 - 4zA^4 + (8z + 2)A^3 - (4z + 6)A^2 + 6A - 2 = 0$$

*Asymptotique :* $A_n \sim a_0\, n^{-\frac{3}{2}}\, \alpha^{-n}$ *où* $15 < \alpha^{-1} < 16$.
*Premiers termes de la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(vérifiés algorithmiquement) :*

$$1, 1, 3, 15, 105, 923, 9417, 105815, 1267681, 15875631, 205301361$$

# Diagrammes de cordes analytiques

## Asymptotique

### Corollaire (2018 : diagrammes analytiques non enracinés)

$$\tilde{A}_n \sim \frac{A_n}{n} \sim a_0 \, n^{-\frac{5}{2}} \, \alpha^{-n}$$

### Ingrédients de la preuve.

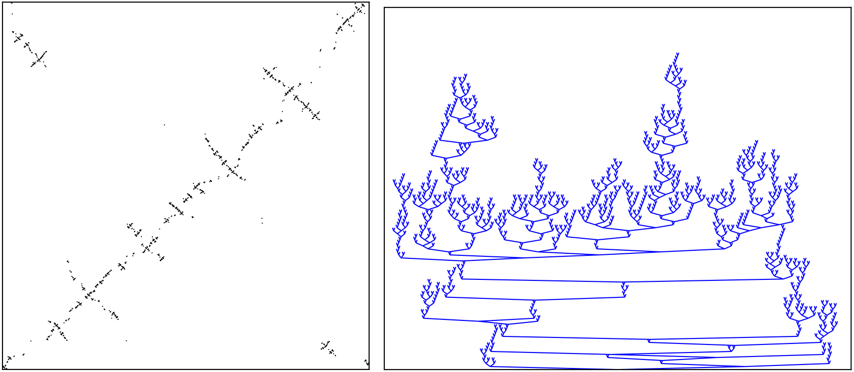
- Formule des classes
- Définition d'un diagramme quotient (si pas d'inversions de cordes)
- Gérer le cas des inversions de cordes
- Analyse et comparaison

$\square$

# Sommaire

# Diagrammes analytiques vs permutations séparables

On connait la forme typique d'une grande permutation séparable.
Son $(\oplus, \ominus)$-arbre converge vers l'arbre brownien. Et les SK-arbres ?

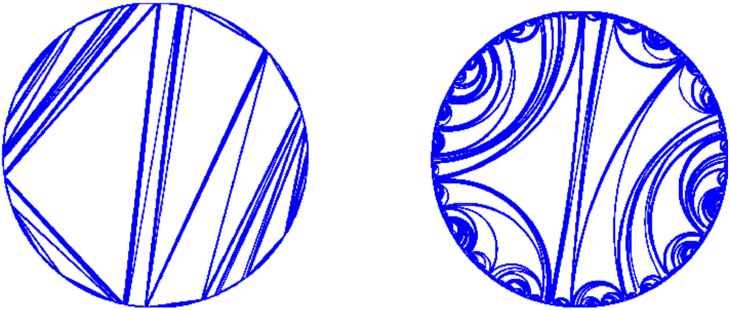


Une permutation séparable et son $(\oplus, \ominus)$-arbre, d'après M. Maazoun.

Grammaire algébrique avec diagramme de dépendance irréductible donc (Miermont, de Raphélis : G-W multitypes) cv vers l'arbre brownien ?

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

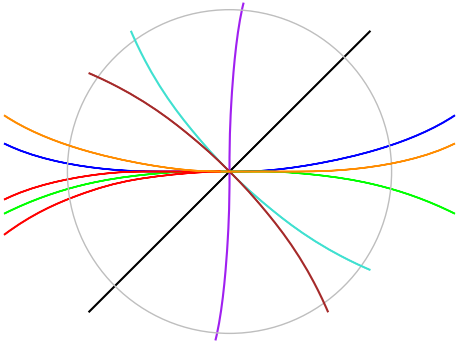
D. Aldous a introduit la limite d'échelle des dissections d'un polygône : convergence en loi (topologie Hausdorff) vers la triangulation brownienne.



Lamination du cercle.

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

## Et pour des classes de diagrammes de cordes avec intersection ?



Motivation : compactification combinatoire de l'espace des singularités.

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

## Et pour des classes de diagrammes de cordes avec intersection ?

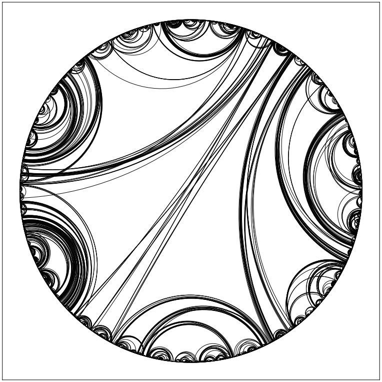
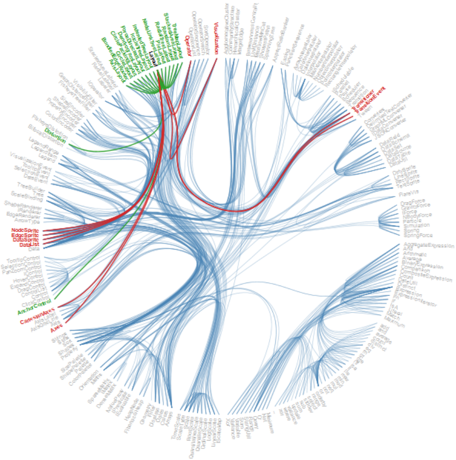


Diagramme analytique aléatoire d'après M. Maazoun (par Boltzmann sampling).

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

## Et pour des classes de diagrammes de cordes avec intersection ?



Utilisations éventuelles pour synthétiser comprendre les échanges.

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

## Et pour des classes de diagrammes de cordes avec intersection ?

Requêtes :

- Limites compatibles avec les limites des graphes d'entrelacement (graphons en limite d'échelle, Benjamini-Schramm si limites locales)
- Limites compatibles avec celles des arbres-de-graphes.

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

## Et pour des classes de diagrammes de cordes avec intersection ?

Requêtes :

- Limites compatibles avec les limites des graphes d'entrelacement (graphons en limite d'échelle, Benjamini-Schramm si limites locales)
- Limites compatibles avec celles des arbres-de-graphes.

# Modèle limite pour les diagrammes de cordes et convergence

## Et pour des classes de diagrammes de cordes avec intersection ?

Idées :

- Les diagrammes à $n$ cordes $E_n$ forment une famille consistente c.a.d. $\mathcal{P}(E_n)$ est un système projectif pour les restrictions aux sous-motifs.
- Un diagramme définit une mesure de probabilité $E_n$ via ses motifs.
- Les limites sont définies par convergence faible des mesures sur $E_\infty$.

# Résumé

## From singularities to combinatorics and back again

- La topologie d'une singularité est encodée par un diagramme de cordes analytique ou un buisson.

# Résumé

## From singularities to combinatorics and back again

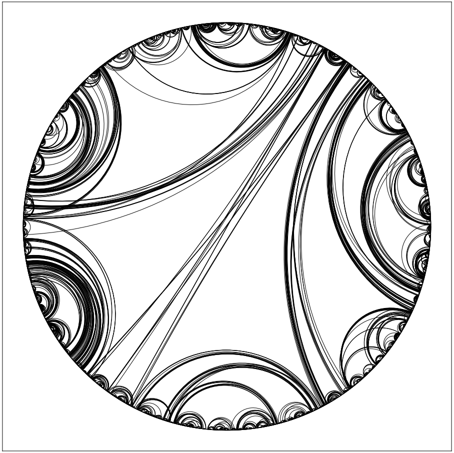
- La topologie d'une singularité est encodée par un diagramme de cordes analytique ou un buisson.
- Les factorisations de ces diagrammes et graphes est appropriée pour comprendre leur structure et les dénombrer.
  - Etablir un théorème de décomposition unique : grammaire inambigüe.
  - Ecrire le système d'équations associé sur les séries génératrices.
  - Etudier le système par les méthodes de combinatoire analytique.

# Résumé

## From singularities to combinatorics and back again

- La topologie d'une singularité est encodée par un diagramme de cordes analytique ou un buisson.
- Les factorisations de ces diagrammes et graphes est appropriée pour comprendre leur structure et les dénombrer.
  - Etablir un théorème de décomposition unique : grammaire inambigüe.
  - Ecrire le système d'équations associé sur les séries génératrices.
  - Etudier le système par les méthodes de combinatoire analytique.
- Reste à étudier les limites d'échelles.
  - Diagrammes de cordes analytiques, analogues aux permutations séparables.
  - D'autres classes de diagrammes en s'autorisant différents motifs interdits aux nœuds de l'arbre.
  - Applications éventuelles en informatique, pour l'étude des nœuds aléatoires,...

# Thank you for listening. Bon appétit !



Random analytic chord diagram (M. Maazoun, 14/12/18).