# Topologie des courbes algébriques réelles

## Combinatoire des configurations locales et globales

Christopher-Lloyd Simon

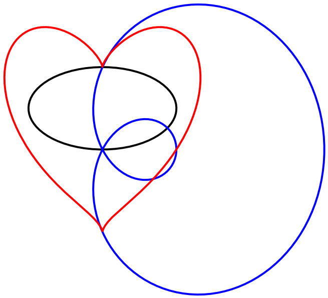
Départment de mathématiques
ENS Lyon

Jeudi 4 Avril 2019

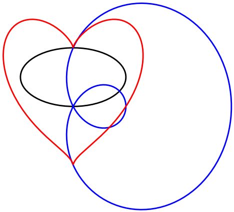
# Présentation du problème

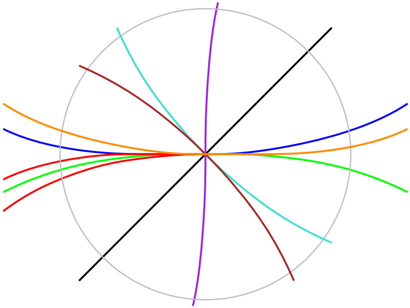
Contexte :

- Une courbe algébrique du plan réel : $F(x, y) = 0$, $F \in \mathbb{R}[x, y]$.
- Composantes connexes du lieu réel de dimension 1.
- Point singulier $\partial_x F(0, 0) = \partial_y F(0, 0) = 0$.



# Présentation du problème





On souhaite comprendre :

- sa classe d'isotopie et
- les croisements de branches aux singularités.

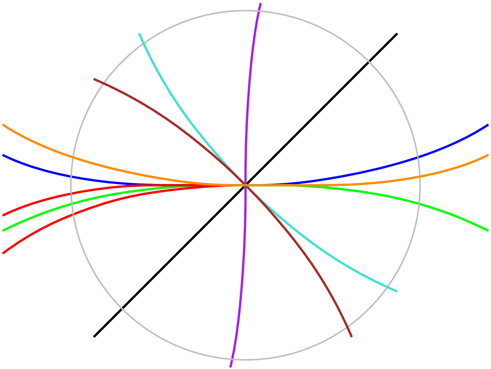
# Sommaire

# Sommaire

# Singularités de courbes algébriques du plan réel

Soit $F \in \mathbb{R}\{x, y\}$ série convergente telle que $F(0,0) = 0$ et $x \nmid F$. Alors son lieu d'annulation est l'union d'un nombre fini de germes de courbes paramétrées injectives disjointes en dehors de l'origine :

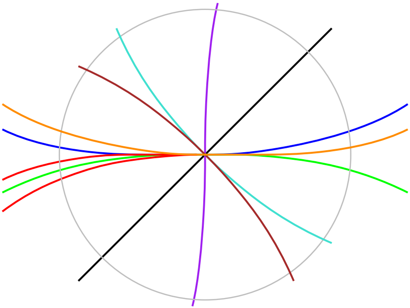
$$t \mapsto (\pm t^m, g(t)) \qquad g \in \mathbb{R}\{t\}$$

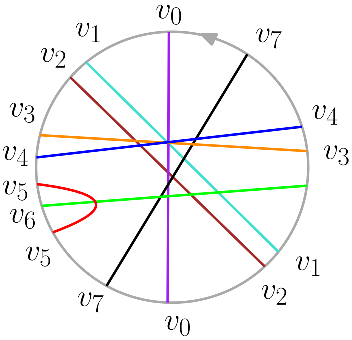


En rouge : $x^5 + x^4 + 2yx^2 + y^2 = 0$

# De la singularité au diagramme de cordes

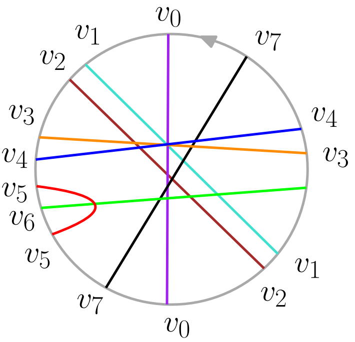
- Branches paramétrées par séries de Puiseux : $\sum_{n \geq 0} a_n \left(\pm x\right)^{\frac{n}{m}}$
- À homéo près : des segments sortent de la singularité
- Segments viennent par paires : diagramme de cordes



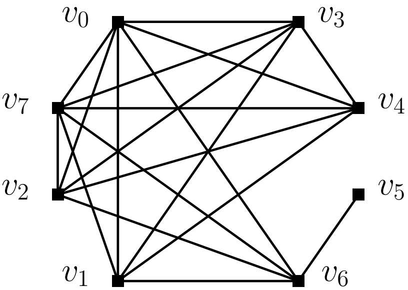



$v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_5 v_7 v_0 v_2 v_1 v_3 v_4 v_7$

# Graphe d'entrelacement du diagramme de cordes




$v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_5v_7v_0v_2v_1v_3v_4v_7$



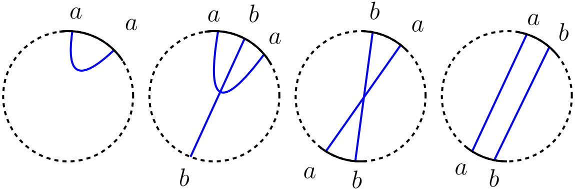

Ces objets combinatoires sont définis indépendament de leur construction à partir de singularités analytiques.

# Sommaire

# Description récursive des diagrammes de cordes analytiques

## Définition

*Si un diagramme de cordes possède comme motif une corde isolée, une fourche, des vrais ou faux jumeaux :*




*on appelle* ***simplification*** *le diagramme obtenu en enlevant la corde indéxée par la lettre « a » d'un tel motif.*

# Description récursive des diagrammes de cordes analytiques

En étudiant la combinatoire du processus de résolution d'une singularité par éclatements successifs, Étienne Ghys a trouvé une description récursive des diagrammes de cordes analytiques :

## Théorème (EG 2017 : diagrammes de cordes analytiques)

- *Le mot vide est un diagramme analytique.*
- *Si un diagramme non vide ne contient pas de corde isolée, de fourche, ou une paire de jumeaux ; alors il n'est pas analytique.*
- *Si par contre il contient un tel motif, alors il est analytique si et seulement si une simplification du diagramme l'est aussi.*

# Éclatements : intuition, définition, terminologie

## Éclatement d'un point sur une surface algébrique

- Éclater un germe de surface lisse $(S, o)$ consiste à remplacer $o$ par l'ensemble des directions tangentes à $S$ en ce point.
- Permet de distinguer les phénomènes au premier ordre en $o$.
- Il existe un morphisme $\pi\colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$ avec $E \simeq \mathbb{P}^1$ qui induit un isomorphisme entre $\hat{S} \setminus E$ et $S \setminus o$.
- Il est unique à transformation birationelle près.
- La courbe $E$ s'apelle le diviseur exceptionel.
- Le germe $\hat{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{o\})}$ est la transformée stricte de $C$.
- Du point du vue du corps des fonctions au point $o$, l'éclatement correspond à un changement de variables $t = \frac{y}{x}$.

# Éclatements : intuition, définition, terminologie

## Éclatement d'un point sur une surface algébrique

- Éclater un germe de surface lisse $(S, o)$ consiste à remplacer $o$ par l'ensemble des directions tangentes à $S$ en ce point.
- Permet de distinguer les phénomènes au premier ordre en $o$.
- Il existe un morphisme $\pi\colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$ avec $E \simeq \mathbb{P}^1$ qui induit un isomorphisme entre $\hat{S} \setminus E$ et $S \setminus o$.
- Il est unique à transformation birationelle près.
- La courbe $E$ s'apelle le diviseur exceptionel.
- Le germe $\hat{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{o\})}$ est la transformée stricte de $C$.
- Du point du vue du corps des fonctions au point $o$, l'éclatement correspond à un changement de variables $t = \frac{y}{x}$.

# Éclatements : intuition, définition, terminologie

## Éclatement d'un point sur une surface algébrique

- Éclater un germe de surface lisse $(S, o)$ consiste à remplacer $o$ par l'ensemble des directions tangentes à $S$ en ce point.
- Permet de distinguer les phénomènes au premier ordre en $o$.
- Il existe un morphisme $\pi\colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$ avec $E \simeq \mathbb{P}^1$ qui induit un isomorphisme entre $\hat{S} \setminus E$ et $S \setminus o$.
- Il est unique à transformation birationelle près.
- La courbe $E$ s'apelle le diviseur exceptionel.
- Le germe $\hat{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{o\})}$ est la transformée stricte de $C$.
- Du point du vue du corps des fonctions au point $o$, l'éclatement correspond à un changement de variables $t = \frac{y}{x}$.

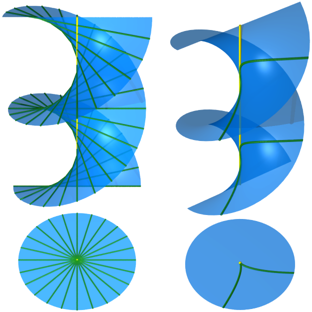
# Éclatements : intuition, définition, terminologie

## Éclatement d'un point sur une surface algébrique

- Éclater un germe de surface lisse $(S, o)$ consiste à remplacer $o$ par l'ensemble des directions tangentes à $S$ en ce point.
- Permet de distinguer les phénomènes au premier ordre en $o$.
- Il existe un morphisme $\pi \colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$ avec $E \simeq \mathbb{P}^1$ qui induit un isomorphisme entre $\hat{S} \setminus E$ et $S \setminus o$.
- Il est unique à transformation birationelle près.
- La courbe $E$ s'apelle le diviseur exceptionel.
- Le germe $\hat{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{o\})}$ est la transformée stricte de $C$.
- Du point du vue du corps des fonctions au point $o$, l'éclatement correspond à un changement de variables $t = \frac{y}{x}$.

# Éclatement d'une surface réelle et bande de Möbius

Construction : l'adhérence dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ du graphe de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y/x \in \mathbb{RP}^1$ est la surface quadratique $y = tx$.



Éclatement d'un pinceau de droites et d'une courbe singulière.

# Éclatements successifs et résolution des singularités

## Résolution des singularités

- Pour résoudre un germe singulier $C$ il faut distinguer des phénomènes à des ordres supérieurs : éclatements successifs.
- Il exsite un morphisme $\Psi \colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$, isomorphisme en dehors du diviseur exceptionel tel que $\hat{C}$ est lisse et $\hat{C} \pitchfork E$.
- Sur $\mathbb{R}$, le graphe dual des $\mathbb{P}^1 \subset E$ est un arbre enraciné,
- la surface $\hat{S}$ est un plombage de bandes qui se rétracte par déformation sur le diviseur exceptionel $E$,
- son bord est connexe et intersecte $\hat{C}$ en des paires de points.

# Éclatements successifs et résolution des singularités

## Résolution des singularités

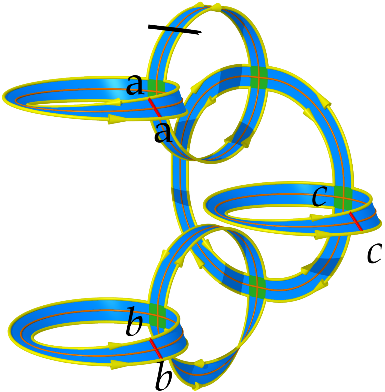
- Pour résoudre un germe singulier $C$ il faut distinguer des phénomènes à des ordres supérieurs : éclatements successifs.
- Il exsite un morphisme $\Psi\colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$, isomorphisme en dehors du diviseur exceptionel tel que $\hat{C}$ est lisse et $\hat{C} \pitchfork E$.
- Sur $\mathbb{R}$, le graphe dual des $\mathbb{P}^1 \subset E$ est un arbre enraciné,
- la surface $\hat{S}$ est un plombage de bandes qui se rétracte par déformation sur le diviseur exceptionel $E$,
- son bord est connexe et intersecte $\hat{C}$ en des paires de points.

# Éclatements successifs et résolution des singularités

## Résolution des singularités

- Pour résoudre un germe singulier $C$ il faut distinguer des phénomènes à des ordres supérieurs : éclatements successifs.
- Il exsite un morphisme $\Psi\colon (\hat{S}, E) \to (S, o)$, isomorphisme en dehors du diviseur exceptionel tel que $\hat{C}$ est lisse et $\hat{C} \pitchfork E$.
- Sur $\mathbb{R}$, le graphe dual des $\mathbb{P}^1 \subset E$ est un arbre enraciné,
- la surface $\hat{S}$ est un plombage de bandes qui se rétracte par déformation sur le diviseur exceptionel $E$,
- son bord est connexe et intersecte $\hat{C}$ en des paires de points.

# Éclatements successifs et colliers de bandes



# Preuve de la description algorithmique

**Lemme (EG 2017)**

*Si un diagramme de cordes est analytique, alors il contient une corde pendante, une fourche ou des jumeaux.*

**Démonstration.**

□

# Preuve de la description algorithmique

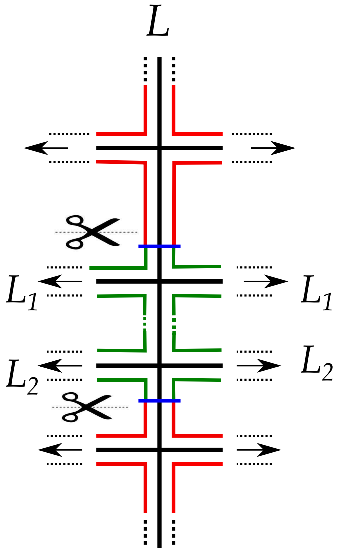
**Démonstration.**

- Résolvons la singularité $C$, cela donne un collier de bandes.
- Soit $L \subset E$ noeud du graphe dual, de hauteur maximale parmi ceux qui ont deux composantes connexes de $\hat{C}$ au dessus.
- Cela définit un sous diagramme de cordes avec le motif voulu.

$\square$

# Preuve de la description algorithmique

Démonstration.



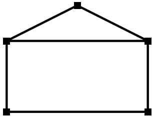
# Quels invariants proviennent de singularités ?

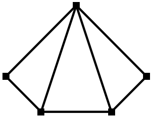
## Graphes d'entrelacements : descriptions métriques et par les motifs interdits

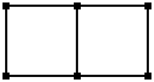
### Théorème (EG-CS 2017 : graphes d'entrelacement singularités)

*Un graphe provient d'une singularité ssi il est :*

- *Repliable : description récursive analogue aux diagrammes analytiques (équivalence non triviale !).*
- *Distance-héréditaire : condition métrique sur les sous-graphes.*
- *Buisson : condition métrique sur 4 points à la Gromov.*
- *Ne contient pas de maison, gemme, domino ou $(n > 4)$-cycle comme graphe induit.*

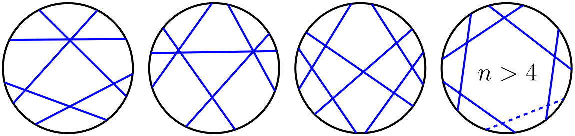






### Corollaire (EG-CS 2017)

*Un diagramme de cordes est analytique ssi il ne contient pas l'un des motifs suivants.*



# Sommaire

# Enumération : Buissons connexes étiquetés

## Proposition (CS 2018 : Série des buissons connexes étiquetés)

*Le nombre $B_n$ de buissons connexes enracinés étiquetés de taille $n$ équivaut à*

$$\frac{b}{2\sqrt{\pi n^3}}.\beta^{-n}.n!$$

$\beta = 2\sqrt{3} - 1 + 2\log\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ *vérifie* $6 < \beta^{-1} < 7$ *et* $b = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{3}}}$.

*Premiers termes de la suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

0, 1, 4, 38, 596, 13072, 368488, 12693536,
516718112, 24268858144, 1291777104256,
76845808729472, 5052555752407424

# Enumération : Diagrammes de cordes analytiques

Théorème (CS 2018 : diagrammes analytiques linéaires)

*La série génératrice des diagrammes analytiques est algébrique :*

$$(z^3+z^2)A^6 - z^2A^5 - 4zA^4 + (8z+2)A^3 - (4z+6)A^2 + 6A - 2 = 0$$

*Asymptotique :* $A_n \sim a_0\, n^{-\frac{3}{2}}\, \alpha^{-n}$ *où* $15 < \alpha^{-1} < 16$.
*Premiers termes de la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(vérifiés algorithmiquement) :*

$$1, 1, 3, 15, 105, 923, 9417, 105815, 1267681, 15875631, 205301361$$

Corollaire (CS 2018 : diagrammes analytiques non enracinés)

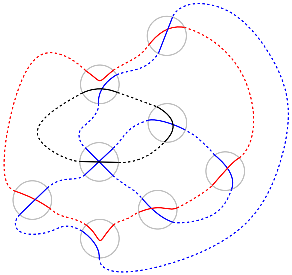
$$\tilde{A}_n \sim \frac{A_n}{n} \sim a_0\, n^{-\frac{5}{2}}\, \alpha^{-n}$$

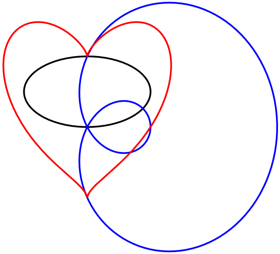
# Sommaire

# Question des configurations globales

## Formalisée avec la notion de courbes combinatoires

Globalement, une courbe algébrique connexe est formée de parties lisses reliant des singularités. Quelles configurations sont possibles ?





Courbe combinatoire : carte connexe, sommets $\leftarrow$ diagrammes.
Formulation avec trois permutations sur ensemble des rayons.

# Réponse : il n'y a pas d'obstruction globale

**Théorème (CS 2018 : Courbes combinatoires algébriques)**

*Toute courbe combinatoire vérifiant les hypothèses topologiques locale et globale, est associée à une courbe algébrique réelle.*

# Réponse : il n'y a pas d'obstruction globale

### Théorème (CS 2018 : Courbes combinatoires algébriques)

*Toute courbe combinatoire vérifiant les hypothèses topologiques locale et globale, est associée à une courbe algébrique réelle.*

### Schéma de la preuve.

- On réalise la courbe combinatoire par des arcs lisses reliant des singularités analytiques. Possible d'après les hypothèses.

□

# Réponse : il n'y a pas d'obstruction globale

**Théorème (CS 2018 : Courbes combinatoires algébriques)**

*Toute courbe combinatoire vérifiant les hypothèses topologiques locale et globale, est associée à une courbe algébrique réelle.*

**Schéma de la preuve.**

- On réalise la courbe combinatoire par des arcs lisses reliant des singularités analytiques. Possible d'après les hypothèses.
- On éclate la surface aux singularités pour avoir une courbe lisse dans une surface éclattée.

□

# Réponse : il n'y a pas d'obstruction globale

### Théorème (CS 2018 : Courbes combinatoires algébriques)

*Toute courbe combinatoire vérifiant les hypothèses topologiques locale et globale, est associée à une courbe algébrique réelle.*

### Schéma de la preuve.

- On réalise la courbe combinatoire par des arcs lisses reliant des singularités analytiques. Possible d'après les hypothèses.
- On éclate la surface aux singularités pour avoir une courbe lisse dans une surface éclattée.
- Approximation $\mathscr{C}^1$ par une courbe algébrique lisse (séries de Fourier, polynômes de Tchebychev, projection orthogonale).

$\square$

# Réponse : il n'y a pas d'obstruction globale

**Théorème (CS 2018 : Courbes combinatoires algébriques)**

*Toute courbe combinatoire vérifiant les hypothèses topologiques locale et globale, est associée à une courbe algébrique réelle.*

**Schéma de la preuve.**

- On réalise la courbe combinatoire par des arcs lisses reliant des singularités analytiques. Possible d'après les hypothèses.
- On éclate la surface aux singularités pour avoir une courbe lisse dans une surface éclattée.
- Approximation $\mathscr{C}^1$ par une courbe algébrique lisse (séries de Fourier, polynômes de Tchebychev, projection orthogonale).
- On implose la courbe approximante.

□

# Réponse : il n'y a pas d'obstruction globale

### Remarque (sur la preuve)

*La preuve fonctionne sur une surface réelle analytique quelconque, et on peut imposer :*

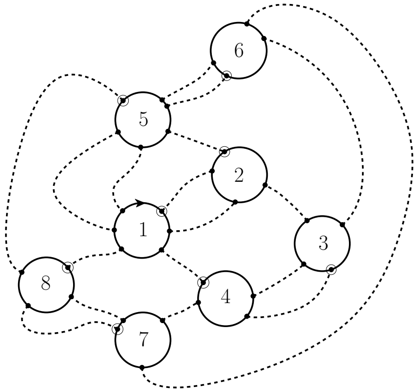
- *un nombre arbitraire de dérivées des branches aux singularités*
- *les classes d'isotopie des arcs lisses entre les diagrammes*

*Attention, à cause de la projection : il faut éventuellement oublier des composantes (points ou courbes) qui se seraient rajoutées, et la courbe n'est pas nécessairement rationelle.*

# Sommaire

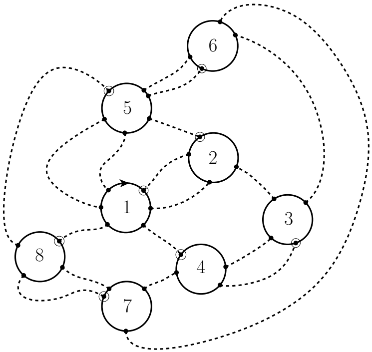
# Énumération des courbes combinatoires algébriques sur $\mathbb{S}^2$

Soit une surface $P_k = \mathbb{S}^2 \setminus \bigsqcup_{l=1}^{s} \mathbb{D}^2$ où $2k = (2k_1, \ldots, 2k_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ compte les points décorés sur chaque composante de bord $J_l$.




Un découpage de $P_{(6,4,4,4,6,4,4,4)}$.

# Énumération des courbes combinatoires algébriques sur $\mathbb{S}^2$




Tutte dénombre en 1962 les découpages de $P_k$ ayant un sommet distingué par composante de bord :

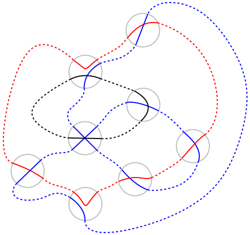
$$\frac{(c-1)!}{(c-s-2)!} \prod_{v=1}^{s} k_v \binom{2k_v}{k_v}.$$

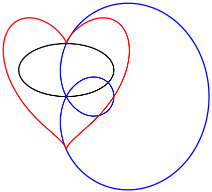
# Énumération des courbes combinatoires algébriques sur $\mathbb{S}^2$

**Proposition (2018 : Courbes combinatoires algébriques sur $\mathbb{S}^2$)**

*Le nombre de courbes combinatoires algébriques de la sphère ayant $s$ sommets indexés et enracinés de tailles $k_1, \ldots, k_v$ vaut :*

$$\frac{(c-1)!}{(c-s-2)!} \prod_{v=1}^{s} k_v \binom{2k_v}{k_v} A_{k_v}.$$





## Énumération des courbes combinatoires algébriques sur $\mathbb{S}^2$

### Proposition (2018 : Courbes combinatoires algébriques sur $\mathbb{S}^2$)

*Le nombre de courbes combinatoires algébriques de la sphère ayant $s$ sommets indexés et enracinés de tailles $k_1, \ldots, k_v$ vaut :*

$$\frac{(c-1)!}{(c-s-2)!} \prod_{v=1}^{s} k_v \binom{2k_v}{k_v} A_{k_v}.$$

### Proposition (2018 : majoration par le nombre d'arêtes)

*Le nombre $Calc_{\mathbb{S}^2}(c)$ de courbes combinatoires algébriques enracinées de la sphère ayant $c$ arêtes vérifie, pour une certaine constante $\rho$ l'inégalité :* $Calc_{\mathbb{S}^2}(c) \leq c^3 \rho^c$.

# Majoration du nombre de courbes algébriques de $\mathbb{RP}^2$

### Théorème (2018 : majoration par le degré)

*Le nombre $Cal_{\mathbb{RP}^2}(d)$ de courbe combinatoires enracinées algébriques de degré $d$ du plan projectif vérifie :*

$$Cal_{\mathbb{RP}^2}(d) = o\left(12^{d^2}\right).$$

### Remarque (2014 : courbes lisses non connexes)

*Kharlamov et Orevkov ont encadré asymptotiquement le nombre de classes d'isotopie algébrique de courbes algébriques lisses de $\mathbb{RP}^2$ de degré $d$, par des expressions de la forme $\exp\left(Cd^2 + o(d^2)\right)$.*

# Résumé

## Un aller-retour entre les singularities et la combinatoire analytique

Singularités analytiques réelles :

- Topologie des singularités : diagrammes de cordes et graphes.
- Outils : éclatement puis combinatoire « algorithmique ».
- Structure des configurations locales et dénombrement.
- Outils : Grammaire inambigüe, combinatoire analytique.

# Résumé

## Un aller-retour entre les singularities et la combinatoire analytique

Singularités analytiques réelles :

- Topologie des singularités : diagrammes de cordes et graphes.
- Outils : éclatement puis combinatoire « algorithmique ».
- Structure des configurations locales et dénombrement.
- Outils : Grammaire inambigüe, combinatoire analytique.

# Résumé

## Un aller-retour entre les singularities et la combinatoire analytique

Courbes algébriques réelles singulières :

- Topologie globale : courbes combinatoires.
- Outils : éclatement, approximation algébrique.
- Énumération des types topologiques
- Outils : Dénombrement de Tutte + configurations locales.

# Résumé

## Un aller-retour entre les singularities et la combinatoire analytique

Courbes algébriques réelles singulières :

- Topologie globale : courbes combinatoires.
- Outils : éclatement, approximation algébrique.
- Énumération des types topologiques
- Outils : Dénombrement de Tutte + configurations locales.

# Merci d'avoir écouté...

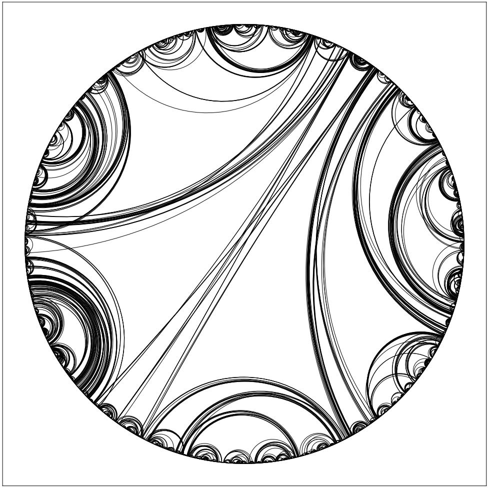


Diagramme de cordes analytique connexe (M. Maazoun, 14/12/18).

# ... et bon appétit !


- É. Ghys, *A singular mathematical promenade*, ENS Editions, 2017.
- É. Ghys and C.-L. Simon, *On the topology of a real analytic curve in the neighborhood of a singular point*, A paraître.
- C.-L. Simon, *Topologie et dénombrement des courbes algébriques réelles*, Soumis pour publication.