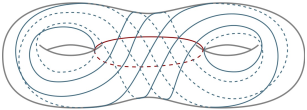
Automorphismes des Variétés de Caractères

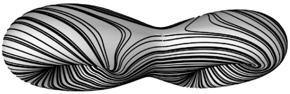
Christopher-Lloyd Simon   joint work with Julien Marché

Départment de mathématiques, ENS Lyon

Laboratoire Paul Painlevé, Lille

Géométrie complexe, Nancy, Printemps 2020





La variété des caractères

Définition : variété des caractère $X(\Sigma)$

- Σ une surface orientable compacte sans bord, genre $g \geq 2$.
- Variété des représentations $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ admet
- une action algébrique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par conjugaison au but.
- Variété des caractères $X(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\!/ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$
- définie comme quotient algébrique = $\mathrm{Spec}(\text{Fonctions invariantes})$
- Pour $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$, fonction invariante : $t_\alpha \colon \rho \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(\alpha))$

Théorème [Procesi] : Présentation de l'algèbre des caractères

L'algèbre $\mathbb{C}[X(\Sigma)]$ des fonctions invariantes est

- engendrée par les $t_\alpha \colon [\rho] \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(\alpha))$ pour $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$
- idéal de relations engendré par $t_1 = 2$ et $t_\alpha t_\beta = t_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta^{-1}}$

Point de vue géométrique : l'espace de Teichmüller

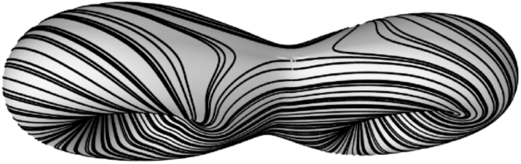
Observation : Les points réels contiennent l'espace de Teichmüller

- Il y a des copies de l'espace de Teichmüller dans $X(\Sigma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$
- on relève les représentations d'holonomie $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$
- fonction trace revient à longueur géodésique : $t_\alpha = 2\cosh(l_\alpha/2)$
- Teichmüller forme un espace Zariski dense, donc :

relations géométriques entre longueurs géodésiques sur Teichmüller

$$=$$

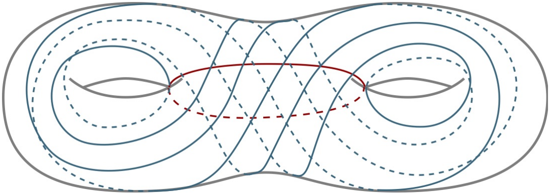
relations algébriques entre leurs fonction traces sur $X(\Sigma)$

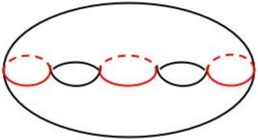


Pointde vue géométrique : compactification de Teichmüller

Rappel : Laminations mesurées et complexe des courbes

- Compactification Mod(Σ)-equivariante de Teichmüller par ¶ ML
- Sur ML structure PL entière
  - points entiers : multicourbes $\Gamma \subset \Sigma$
  - le volume de Thurston
  - la forme d'intersection
- Complexe courbes $(\mathcal{C}, \perp)$
  - sommets : courbes simples α (multicourbes à une composante)
  - arêtes : lorsque $\alpha \perp \beta$ c'est-à-dire $i(\alpha, \beta) = 0$





Automorphismes

Définition : Action du groupe modulaire

- $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$ par Dehn-Nielsen-Baer
- $\mathrm{Mod}(\Sigma) \curvearrowright X(\Sigma)$ selon $\phi \cdot [\rho] = [\rho \circ \phi^{-1}]$
- Multiplication par une représentation centrale $\pi_1(\Sigma) \to \{\pm 1\}$
- Représentation centrales $= H^1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
- On en déduit $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{Mod}(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(X(\Sigma))$

Théorème [M-S] : $\mathrm{Aut}(X(\Sigma)) \approx \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma))$

Si $g \geq 3$ alors $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{Mod}(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(X(\Sigma))$ isomorphisme.
Si $g = 2$ elle a noyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par l'involution hyperelliptique.

Résultats géométrique analogues

Résultats : rigidité des actions de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$

Des structures qui ont $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ pour groupe d'automorphismes :

- Teichmüller + métrique (Teichmüller, Weil-Petersen ou Thurston)
- ML + structure PL (ou symplectique ou intersection)
- Le complexe des courbes $(\mathcal{C}, \perp)$

Résultats de Earle-Kra, Masur-Wolf, Walsh ; Papadopoulos ; Ivanov.
(Voir aussi un survey de Aramayona-Souto.)

Stratégie : retrouver algébriquement les actions connues

Définition : l'espace $\mathcal{V}$ des valuations $v\colon \mathbb{C}[X(\Sigma)]^* \to \mathbb{R}_+$ telles que

- $v(\mathbb{C}^*) = \{0\}$
- $v(fg) = v(f) + v(g)$
- $v(f+g) \leq \max\{v(f), v(g)\}$ (où l'on étend $v(0) = -\infty$)

Munissons $\mathcal{V}$ de la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathbb{C}[X(\Sigma)]$.
L'anneau de valuation régulier $\mathcal{O}_v^+ = \{f \in \mathbb{C}[X(\Sigma)] \mid v(f) \leq 0\}$.

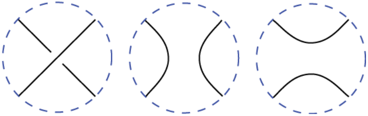
Plan : plonger $\mathrm{ML} \hookrightarrow \mathcal{V}$ puis caractériser algébriquement $\mathrm{ML}\,\&(\mathcal{C}, \perp)$

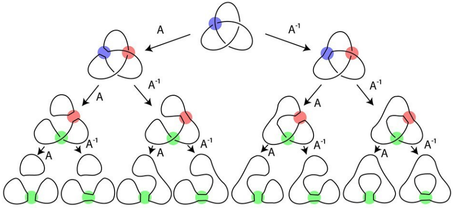
- ML correspond aux valuations simples
  - Les valuations indomptables en forment un sous ensemble qui est dense
  - Les valuations indomptables sont préservées par $\mathrm{Aut}(X(\Sigma))$
- La structure de $(\mathcal{C}, \perp)$ est intrinsèque à la structure algébrique
  - valuations simples et discrètes correspondent aux multicourbes duales
  - le nombre de composantes se lit sur l'anneau de valuation
  - caractère disjoint se lit sur l'intersection des anneaux de valuation

Base linéaire et valuations simples

Théorème [Procesi] : Présentation de l'algèbre des caractères

L'algèbre $\mathbb{C}[X(\Sigma)]$ est engendrée par les t_α pour $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$ avec pour idéal de relations engendré par $t_1 = 2$ et $t_\alpha t_\beta = t_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta^{-1}}$ pour $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma)$.





Application : Décomposer t_α et termes des traces de courbes simples

en utilisant la relation de trace pour résoudre les s intersections de α :

$$-t_\alpha = (-1)^s \sum_{2^s \text{ etats}} \cdot \prod_{\text{cercles}} -t_{\gamma_j}$$

Base linéaire et valuations simples

Théorème [Procesi] : Présentation de l'algèbre des caractères

L'algèbre $\mathbb{C}[X(\Sigma)]$ est engendrée par les t_α pour $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$ avec pour idéal de relations engendré par $t_1 = 2$ et $t_\alpha t_\beta = t_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta^{-1}}$ pour $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma)$.

Définition : multicourbes et leur trace

Multicourbe $\Gamma \subset \Sigma$ union disjointe de courbes simples γ_j et $t_\Gamma = \prod t_{\gamma_j}$.

Théorème [Przytycki-Sikora] : Base Linéaire (analogue des monomes)

Les t_Γ pour Γ multicourbe forment une base linéaire de l'algèbre $\mathbb{C}[X(\Sigma)]$.

Définition : valuations simples (analogue des valuations monomiales)

Une valuation $v \in \mathcal{V}$ est *simple* si pour $f = \sum m_\Gamma t_\Gamma$ dans $\mathbb{C}[X(\Sigma)] \setminus \{0\}$:

$$v(f) = \max\{v(t_\Gamma) \mid m_\Gamma \neq 0\}$$

Les laminations mesurées sont des valuations simples

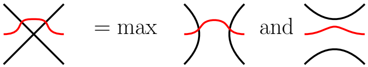
Proposition : plongement de ML dans les valuations simples

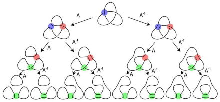
Soit $\lambda \in \mathrm{ML}$: il existe une unique valuation simple $v_\lambda \in \mathcal{V}$ telle que

$$v_\lambda(t_\alpha) = i(\lambda, \alpha) \quad \forall \alpha \in \pi_1(\Sigma)$$

- Bien défini : formule D. Thurston, intersection avec une courbe simple.

$$i(\alpha, \lambda) = \bigvee_{\Gamma} \sum_{\gamma_j} i(\gamma_j, \lambda) = \max\{i(\Gamma, \lambda) \mid \text{etats}\, \Gamma\} = v_\lambda(t_\alpha)$$





- Morphisme $v(fg) = v(f) + v(g)$:
  intégrité d'un anneau gradué associé à la valuation (pas $\mathcal{O}_v^+$)

Domination des valuations

Définition : structure d'ordre et valuations indomptables

Ordre partiel sur $\mathcal{V}$: $v \leq w$ si $v(f) \leq w(f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}[X(\Sigma)]$.
Une valuation u est *indomptable* si $u \leq v$ entraîne $v = Cu$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Théorème [Morgan-Otal-Skora, M-S] : domination de $\mathcal{V}$ par ML

Pour toute valuation $v \in \mathcal{V}$ il existe $\lambda \in \mathrm{ML}$ telle que $v \leq v_\lambda$,
et de plus $v(t_\alpha) = v_\lambda(t_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$.

Corollaires (Importants)

- Valuations Simples = ML (en particulier ML est fermé dans $\mathcal{V}$).
- Les indomptables $\mathcal{U}$ sont dans ML.

Temporisation et remarque sur l'invariance

Un plongement ML $\subset \mathcal{V}$ simple certes, mais à priori non canonique...

- On a caractérisé les lamination mesurées en termes de valuations.
- Pas clair que les valuations simples soient préservées par $\mathrm{Aut}(X(\Sigma))$. En effet, nous n'avons pas caractérisé algébriquement la base linéaire.

- Les valuations indomptables sont évidement préservées par $\mathrm{Aut}(X(\Sigma))$.
- Pour montrer que les simples aussi il suffit de montrer $\overline{\mathcal{U}} = \mathrm{ML}$...

Corollaire à la domination par ML en admettant la densité $\overline{\mathcal{U}} = \mathrm{ML}$

L'action par $\mathrm{Aut}(X(\Sigma)) \curvearrowright \mathcal{V}$ préserve notre plongement ML $\subset \mathcal{V}$.

Densité des indomptables dans les laminations mesurées

Définition : valuations strictes.

Valuation stricte : $v(t_\Gamma) \neq v(t_\Delta)$ si $\Gamma \neq \Delta$.
Cela entraîne simple : $v(f) \neq v(g) \implies v(f+g) = \max\{v(f), v(g)\}$.

On montre que les valuations strictes sont de μ_{Th}-mesure pleine dans ML (ce qui est plus fort que générique au sens de Baire).

Topologie du support de $\lambda \in$ ML : deux conditions μ_{Th} génériques

- maximalité du support (équivaut complémentaire = union de triangles)
- unique ergodicité : supporte une unique mesure invariante [Masur]

Proposition : densité $\overline{\mathcal{U}} =$ ML

Les valuations strictes provenant de laminations uniquement ergodiques et maximales sont indomptables.
Presque toute lamination mesurée est indomptable, en particulier $\overline{\mathcal{U}} =$ ML.

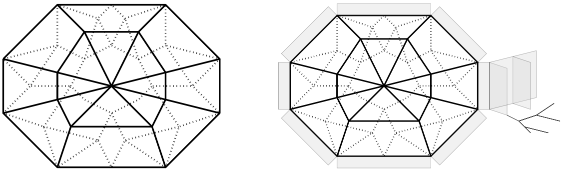
Rappel de la stratégie

Plonger ML dans $\mathcal{V}$ et montrer son invariance par Aut($(X(\Sigma))$

OK ML correspond aux valuations simples

Dur Les valuations indomptables en forment un sous ensemble dense

Sur Les valuations indomptables sont préservées par Aut($X(\Sigma)$)



La structure de $(\mathcal{C}, \perp)$ est intrinsèque à la structure algébrique de $\mathcal{V}$

- Les valuations simples et discrètes sont $\mathrm{ML}(\mathbb{Z})^*$: les $\frac{1}{2}\Gamma \in H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$
- courbes simple : v simple discrète telle que $\mathrm{codim}(\mathcal{O}_v^+) = 1$
- courbes simples disjointes $\gamma \perp \delta \iff \mathrm{codim}(\mathcal{O}_\gamma^+ \cap \mathcal{O}_\delta^+) = 2$

Valuations discrètes

Définition : valuations discrètes

Une valuation $v \in \mathcal{V}$ est discrète si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Proposition : valuations simples et discrètes = multicourbes duales

Une valuation simple v_λ est discrète ssi $\lambda = \frac{1}{2}\Gamma$ pour Γ multicourbe nulle dans $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (poids demi entiers sur les multicourbes qui bordent).

L'anneau $\mathcal{O}_\lambda^+ = \{f \in \mathbb{C}[X(\Sigma)] \mid v_\lambda(f) \leq 0\} = \mathrm{Vect}\left(\{t_\Delta \mid i(\lambda, \Delta) = 0\}\right)$.
Sa codimension de Krull est la dimension de l'image $X(\Sigma) \to X(\Sigma \setminus \lambda)$.

Proposition : Composantes et intersection en termes de codimension

Le nombre de composantes distinctes d'une multicourbe Γ est $\operatorname{codim} \mathcal{O}_\Gamma^+$.
Pour des courbes simples, on a $\operatorname{codim} \mathcal{O}_\gamma^+ \cap \mathcal{O}_\delta^+ \leq 2$ avec égalité ssi $\gamma \perp \delta$.

Conclusion

Dernier coup de pioche.

On a donc un morphisme $\mathrm{Aut}(X(\Sigma)) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}, \perp)$ qui est surjectif, d'image $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ (quotienté par l'involution hyperelliptique en genre 2).
Noyau: $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}/2)$ agit par multiplication des représentations centrales.

Plonger ML dans $\mathcal{V}$ puis caractériser algébriquement ML et $(\mathcal{C}, \perp)$

- ML correspond aux valuations simples
  - Les valuations indomptables en forment un sous ensemble dense
  - Les valuations indomptables sont préservées par $\mathrm{Aut}(X(\Sigma))$
- La structure de $(\mathcal{C}, \perp)$ est intrinsèque à la structure algébrique
  - valuations simples et discrètes correspondent aux multicourbes duales
  - le nombre de composantes se lit sur l'anneau de valuation
  - le caractère disjoint se lit sur l'intersection des anneaux de valuation

Merci pour votre attention.

Appendice : Preuve du théorème de domination

Théorème : Domination de $\mathcal{V}$ par ML

Pour toute valuation $v \in \mathcal{V}$ il existe $\lambda \in \mathrm{ML}$ telle que $v \leq v_\lambda$,
et de plus $v(t_\alpha) = v_\lambda(t_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$.

- Représentation tautologique $\pi_1(\Sigma) \to \mathrm{SL}_2(K)$ où $[K\colon \mathbb{C}(X(\Sigma))] = 2$
- On relève v sur $\mathbb{C}(X(\Sigma))$ en $\tilde{v}$ sur K.
- L'arbre de Bass-Serre $T_{\tilde{v}}$ pour $(\mathrm{SL}_2(K), \tilde{v})$
- admet une action par isométries du $\pi_1(\Sigma)$
- Morgan-Otal donne $T_\lambda \to T_{\tilde{v}}$ application contractante (domination)
- avec Skora on montre isométrie sur son image (égalité sur $\pi_1(\Sigma)$)