Arithmétique et Topologie des Nœuds Modulaires

Christopher-Lloyd Simon

Université de Lille

Ecole Doctorale MADIS 631

Laboratoire Paul Painlevé

Le 24 Juin 2022

Devant le jury composé de

Francis Bonahon	Jean-Pierre Otal	(Rapporteurs)
Louis Funar	Anne Pichon	(Examinateurs)
Etienne Ghys	Patrick Popescu-Pampu	(Directeurs)

Sommaire

Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

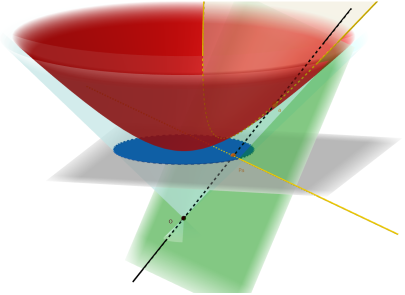
Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des isométries du plan hyperbolique $\mathbb{PH}$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad-bc=1 \end{smallmatrix} \right\} \qquad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ a+d=0 \end{smallmatrix} \right\}$$

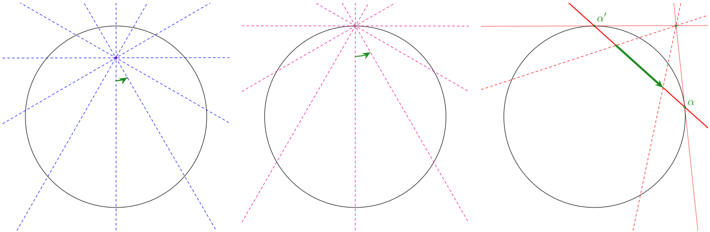
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\} \qquad \mathbb{H} = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \mid \det(\mathfrak{a}) = 1\}$$



Projectification de l'hyperboloïde à deux nappes $\mathbb{H} \to \mathbb{PH}$

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des isométries du plan hyperbolique $\mathbb{PH}$

$$A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \quad \curvearrowright \quad \mathfrak{a} \in \mathbb{PH} \quad : \quad A \cdot \mathfrak{a} = A\mathfrak{a}A^{-1}$$

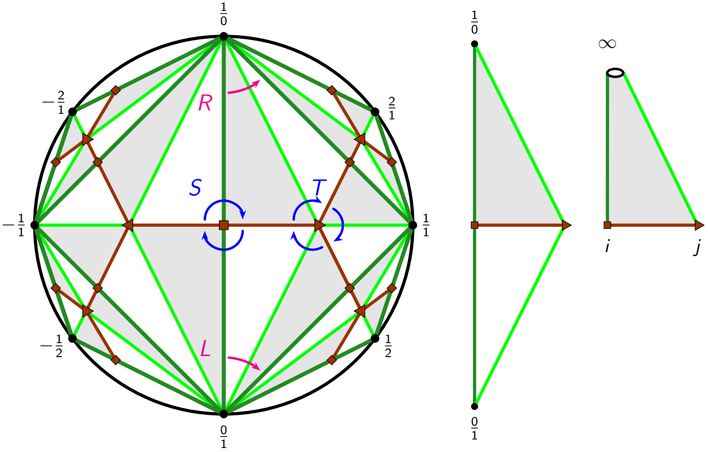


Isométries : elliptique, parabolique, hyperbolique

$$\mathrm{disc}(A) = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \quad \in \quad [-4, 0\,[\; \sqcup \; \{0\} \; \sqcup \;]\,0, +\infty[$$

Action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{PH}$

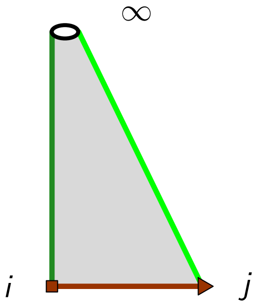
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

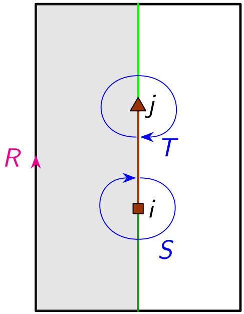


Pavage du plan hyperbolique sous l'action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

L'orbifold modulaire $\mathbb{M} = \mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{PH}$

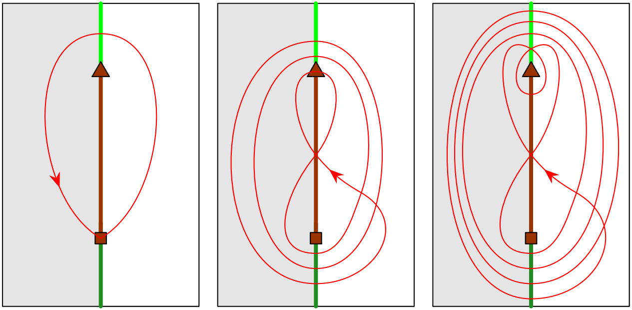
$$\pi_1(\mathbb{M}) = \mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



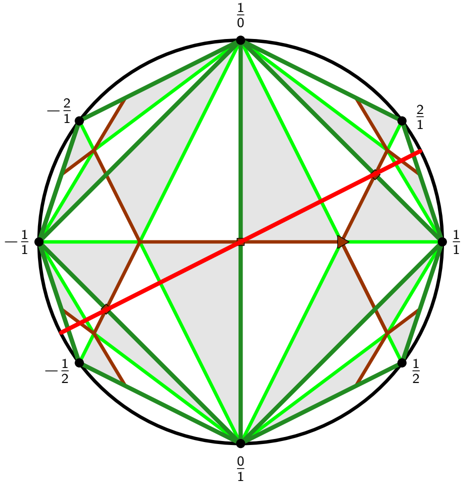


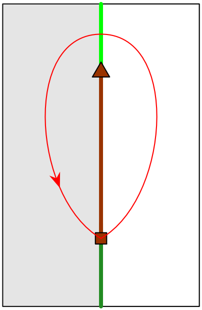
Classes d'homotopies de lacets dans l'orbifold modulaire

Classes d'homotopie libre de lacets orientés dans $\mathbb{M}$	Classes de conjugaison dans $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
Entoure singularité conique i ou j	Elliptique : S ou $T^{\pm 1}$
Entoure le cusp ∞	Parabolique : R^n, $n \in \mathbb{Z}$
$\exists!$ représentant géodésique γ_A de longueur λ_A	Hyperbolique : $\mathrm{disc}(A) = \left(2 \sinh \frac{\lambda_A}{2}\right)^2$



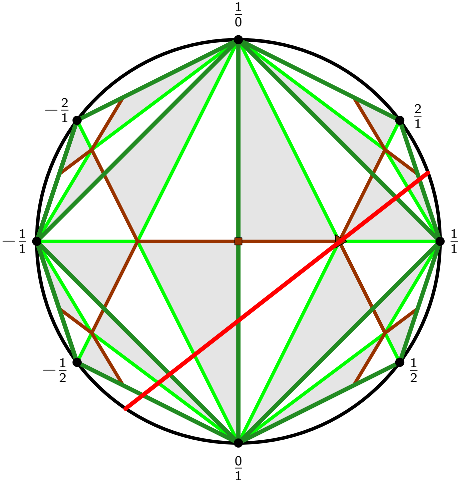
Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques

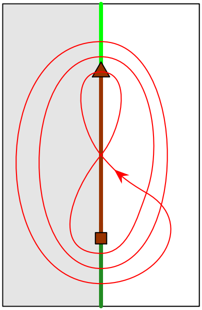




L'axe de $A = RL$ dans $\mathbb{PH}$ se projète sur γ_A dans $\mathbb{M}$.

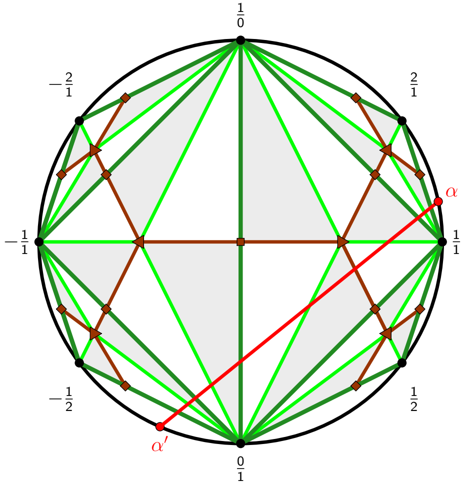
Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques

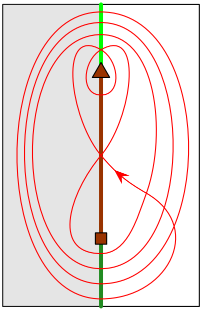




L'axe de $A = RLL$ dans $\mathbb{PH}$ se projète sur γ_A dans $\mathbb{M}$.

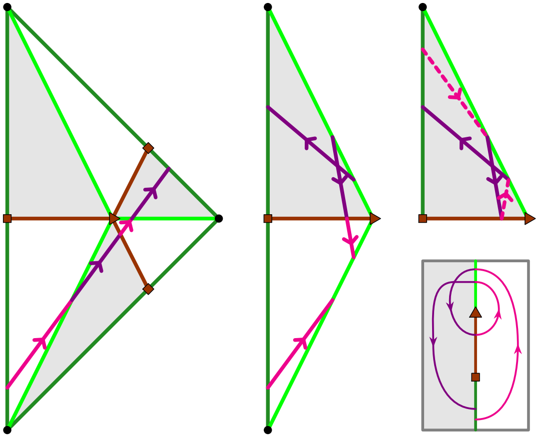
Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques





L'axe de $A = RLLL$ dans $\mathbb{PH}$ se projète sur γ_A dans $\mathbb{M}$.

Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques



Projection d'une portion de l'axe encodée par $S^{-1}T^{-2}S^{-1}$.

Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

Groupes de classes $\mathrm{Cl}(\Delta)$ de discriminant Δ

Même longueur $\lambda(\gamma_A) = \lambda(\gamma_B)$	$\Longleftrightarrow$	Même discriminant $\mathrm{disc}(A) = \mathrm{disc}(B)$	$\Longleftrightarrow$	Conjuguées sur $\mathbb{C}$ $\exists C \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$: $CA = BC$

Les classes $\mathrm{Cl}(\Delta)$ de cette relation d'équivalence ont :

- *des cardinaux finis,*
  (Lagrange 1775 : réduction des formes quadratiques)
- *des cardinaux non bornés,*
  (Horowitz 1972 : relations de trace dans SL_2)
- *et des structures de groupes abéliens.*
  (Gauss 1801 : composition des formes quadratiques)

Équivalence $\mathbb{K}$-arithmétique

Définition :

Pour une extension $\mathbb{K}$ du corps des rationnels $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{c} A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\ \mathbb{K}\text{-équivalentes} \end{array} \quad \overset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} \text{Conjuguées sur } \mathbb{K} \\ \exists C \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) : \\ CA = BC \end{array}$$

Remarques et conséquences :

- La $\mathbb{K}$-équivalence entraîne en particulier $\mathrm{disc}(A) = \mathrm{disc}(B)$.
- Le relation d'équivalence la plus fine est la $\mathbb{Q}$-équivalence.

Questions :

1. Comprendre le groupement des $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-classes en $\mathbb{K}$-classes.
2. Formulations géométrique & arithmétique de la $\mathbb{K}$-équivalence.

Interprétation arithmético-géométrique de la $\mathbb{K}$-équivalence

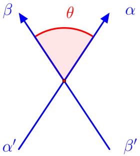
Théorème : $\mathbb{K}$-équivalence des géodésiques modulaires

$A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de discriminant $\Delta > 0$ sont $\mathbb{K}$-équivalentes $\iff$ $\gamma_A, \gamma_B \subset \mathbb{M}$ satisfont les conditions équivalentes suivantes :

θ: $\exists$ un point d'intersection d'angle $\theta \in]0, \pi[$ tel que :

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = X^2 - \Delta Y^2 \qquad \text{pour} \quad X, Y \in \mathbb{K}$$

auquel cas c'est vrai $\forall$ point d'intersection.



Angle bien défini dans $]0, \pi[$.

Interprétation arithmético-géométrique de la $\mathbb{K}$-équivalence

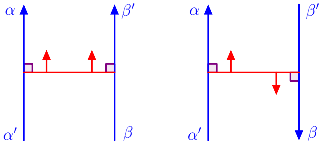
Théorème : $\mathbb{K}$-équivalence des géodésiques modulaires

$A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de discriminant $\Delta > 0$ sont $\mathbb{K}$-équivalentes $\iff$ $\gamma_A, \gamma_B \subset \mathbb{M}$ satisfont les conditions équivalentes suivantes :

λ: $\exists$ une ortho-géodésique co-orientée de longueur λ telle que :

$$\left(\cosh \tfrac{\lambda}{2}\right)^2 = X^2 - \Delta Y^2 \qquad \text{pour} \quad X, Y \in \mathbb{K}$$

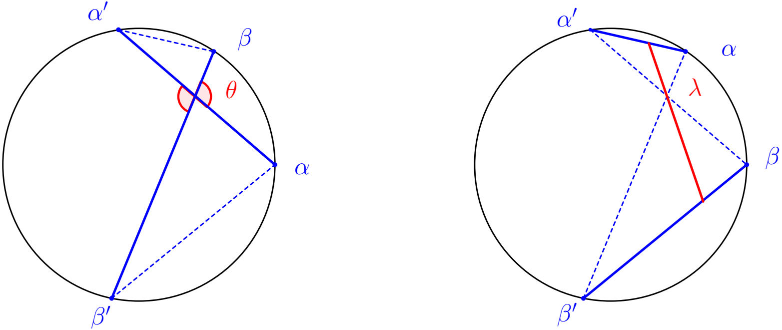
auquel cas c'est vrai $\forall$ ortho-géodésique co-orientée.



Ortho-géodésiques bien et mal co-orientées.

Preuve géométrique : action adjointe $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$

$$\begin{matrix} C \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{K}) \\ AC = CB \end{matrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{matrix} (x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ x^2 - \frac{1}{4}\Delta y^2 = \chi \end{matrix}$$



$$\frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha',\alpha,\beta',\beta)} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \qquad \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha',\alpha,\beta',\beta)} = \left(\cosh\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

Remarques :

- On demande que les quantités $c^2 = 1/\,\mathsf{bir}$ appartiennent au groupe des normes de l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{K}$.

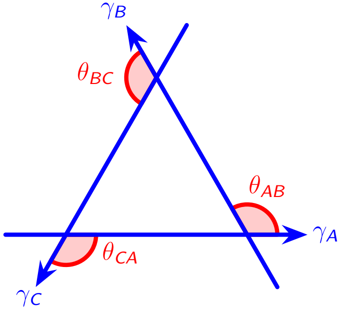
- Classes de conjugaison symétriques de $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{matrix} A = CA^{-1}C \\ \gamma_A = \gamma_{A^{-1}} \end{matrix} \iff \begin{matrix} \gamma_A \text{ passe par } i \\ [i] \in \gamma_A \subset \mathbb{M} \end{matrix} \implies \begin{matrix} c^2 \text{ et } 1 - c^2 \in \\ Norm(\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{Q}) \end{matrix}$$

Remarques :

- On demande que les quantités $c^2 = 1/\operatorname{bir}$ appartiennent au groupe des normes de l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{K}$.

- Relation d'équivalence : pour chaque $\Delta > 0$, les propriétés sur les angles et les ortho-géodésiques sont transitives !



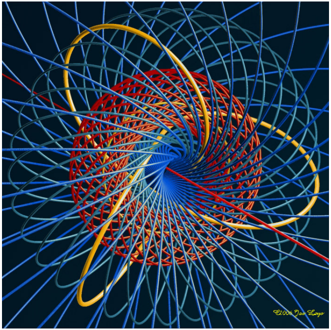
Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

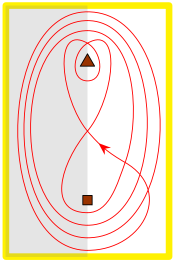
Fibré tangent unitaire $\mathbb{U}$ à l'orbifold modulaire $\mathbb{M}$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})"'] \arrow[d, "\mathbb{S}^1"'] & \mathbb{U} \arrow[d, "\mathbb{S}^1"'] \\
\mathbb{PH} \arrow[r, "\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})"'] & \mathbb{M}
\end{tikzcd}$$



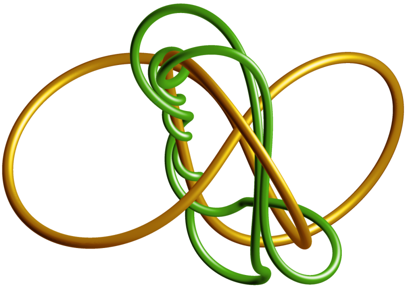
Nœuds modulaires dans $\mathbb{U}$

Classes de conjugaison hyperboliques primitives de $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	Géodésiques modulaires primitives dans $\mathbb{M}$	Orbites périodiques primitives dans $\mathbb{U}$



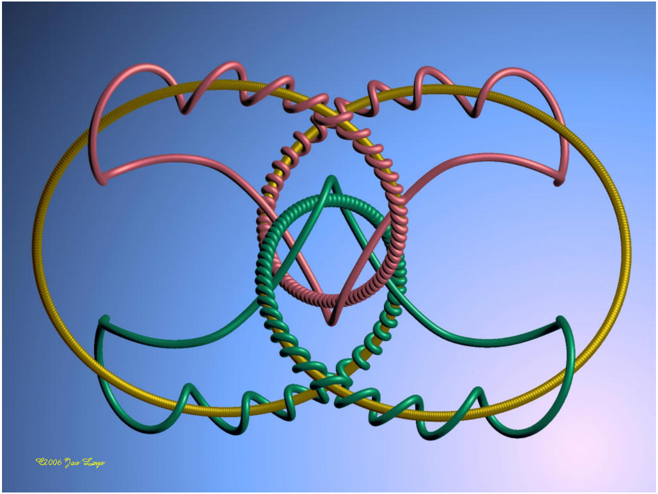
$\rightsquigarrow$

$\leftarrow$



Les géodésiques modulaires γ_A se relèvent en des nœuds modulaires k_A

Comprendre la topologie de *l'entrelacs modulaire maître*



Deux nœuds modulaires qui s'enlacent dans le complémentaire du trèfle.

Classes de conjugaison et mots binaires cycliques

Monoïde Euclidien

$$R = TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = T^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Group}(L, R) \quad &\supset \quad \mathrm{SL}_2(\mathbb{N}) = \mathrm{Monoïde}(L, R) \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Group}(L, R) \quad &\supset \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N}) = \mathrm{Monoïde}(L, R) \end{aligned}$$

Classe de conjugaison $[A]$ d'un $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre infini :

- $[A] \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$: permutations cycliques d'un $L\&R$-mot $\neq \emptyset$.
- Classe primitive $\iff$ mot cyclique primitif.
- Classe hyperbolique $\iff$ $\#L > 0$ et $\#R > 0$.

Combinatoire des mots $\leftrightarrow$ Topologie des entrelacs

Définition : invariants combinatoires

Pour la classe de conjugaison de $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$ on définit

- sa longueur combinatoire $\mathrm{len}([A]) = \#R + \#L$
- son nombre de Rademacher $\mathrm{Rad}([A]) = \#R - \#L$

Théorème [Ghys 2006] :

Pour toute classe de conjugaison hyperbolique $[A]$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{Rad}([A]) = \mathrm{lk}(\text{trèfle}, k_A)$$

Question [Ghys 2006] :

Interprétation arithmétique de l'enlacement $\mathrm{lk}(k_A, k_B)$
entre deux nœuds modulaires k_A, k_B ?

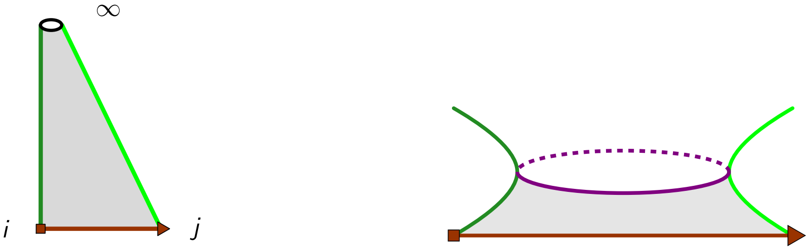
Définition : « série de Poincaré bivariée »

Pour $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques, on définit la somme :

$$\mathsf{L}_1([A],[B]) := \sum \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad \in \mathbb{R}_+^*$$

portant sur les angles aux points d'intersection $\gamma_A \cap \gamma_B$.

Déformons la métrique hyperbolique de $\mathbb{M}$ en ouvrant le cusp...



L'orbifold $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1$ et sa déformation $\mathbb{M}_q$ avec $q = (2\sinh\frac{\lambda}{2})^2$

Variété des caractères $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$

Caractères des représentations Fuchsiennes :

$$\left\{\begin{matrix}\text{Métriques hyperboliques} \\ \text{complètes sur } \mathbb{M}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\rho\colon\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \\ \rho \text{ fidèle \& discrète}\end{matrix}\right\} / \,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

- Tore algébrique réel de dim 1, paramétré par $q \in \mathbb{R}^*$.
- La matrice $A_q = \rho_q(A)$ s'obtient d'une factorisation de A en un produit de $L\&R$ en remplaçant L par L_q et R par R_q où

$$L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix} \qquad R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\rho_q\colon\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$$

La q-série de Poincaré bivariée $L_q(A, B)$

Classes de conjugaison d'ordre infini (hyperbolique) de $\pi_1(\mathbb{M}_q) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	Géodésique orientée fermée (non cuspidale) de $\mathbb{M}_q = \rho_q(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))\backslash\mathbb{PH}$

Définition : « q-série de Poincaré bivariée »

Pour $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques, définissons la fonction :

$$\mathrm{L}_q([A],[B]) := \sum \left(\cos \tfrac{1}{2}\theta_q\right)^2 \quad \in \sqrt{\mathbb{Q}(q)}$$

où la somme porte sur les angles d'intersections θ_q des géodésiques q-modulaires $\gamma_{A_q}, \gamma_{B_q} \subset \mathbb{M}_q$.

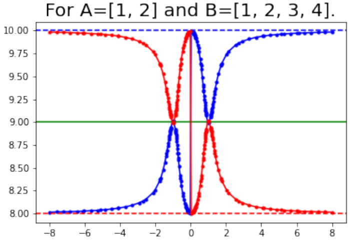
Cela définit une fonction de $q \in \mathbb{R}^*$, ou sur $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$.

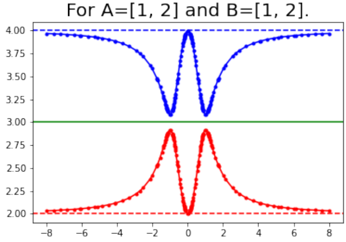
L'enlacement s'évalue au bord de la variété des caractères

Théorème : Enlacement comme évaluation de L_q au bord de X

La limite de $q \mapsto \mathrm{L}_q([A],[B])$ au bord de la variété des caractères retrouve l'enlacement des nœuds modulaires associés à A et B :

$$\mathrm{L}_q([A],[B]) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 2\,\mathrm{lk}(k_A, k_B).$$

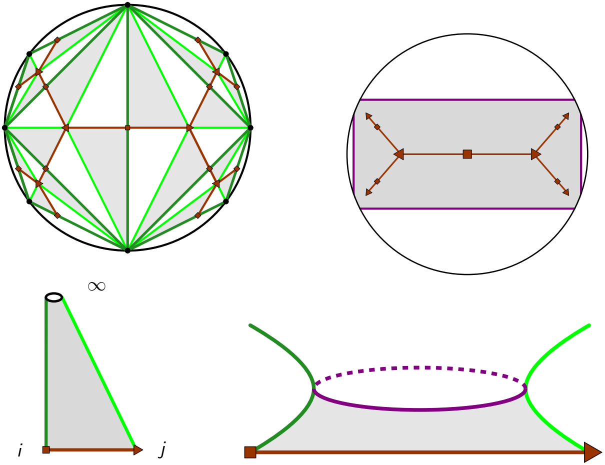




$L_q(A,B)$ interpole entre l'arithmétique en 1 et la topologie en $+\infty$.

Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent $\mathcal{T}$

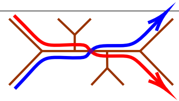
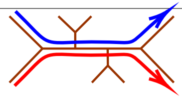
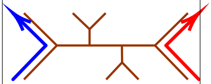
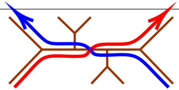
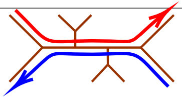
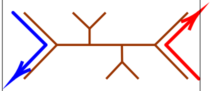
1. Relevons le cœur convexe de $\mathbb{M}_q$ dans $\mathbb{PH}$: $\frac{1}{q^2}$-voisinage de $\mathcal{T}_q$.



2. La représentation ρ_q tend vers l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{T}$.

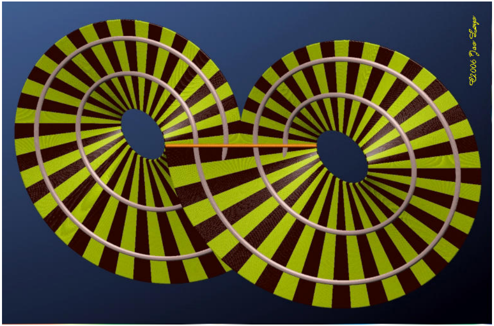
Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent $\mathcal{T}$

3. Les angles $\theta_q \to 0 \bmod \pi$ donc $\cos(\theta_q) \to \pm 1$.
4. La somme $\mathrm{L}_q(A, B)$ compte les paires d'axes $(+1, +1)$:

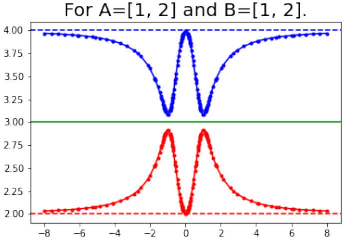
|cross| / cosign	$+1$	0	0
$+1$			
-1			

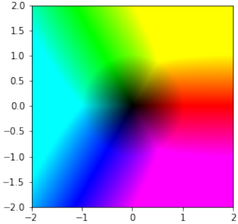
Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent $\mathcal{T}$

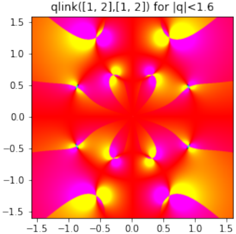
5. On retrouve une formule algorithmique pour l'enlacement en termes des $L\&R$-cycles, utilisée par Pierre Dehornoy (2011).

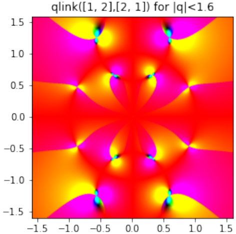


Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q réel et complexe



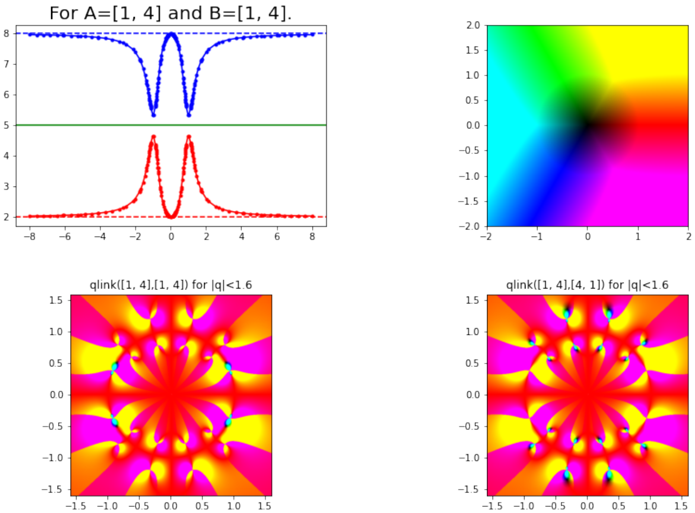






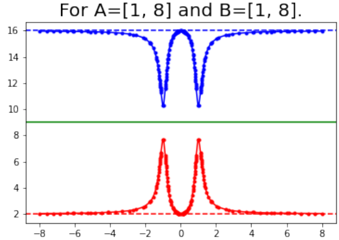
$L_q(A, B)$ et $L_q(A, {}^tB)$ pour $A = B = RLL$ et ${}^tB = RRL$.

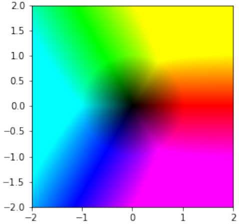
Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q réel et complexe

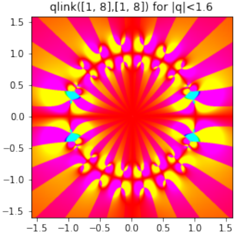


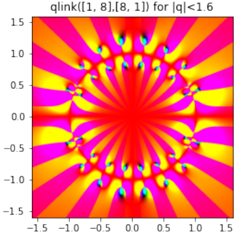
$L_q(A, B)$ et $L_q(A, {}^tB)$ pour $A = B = RL^4$ et ${}^tB = R^4L$.

Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q réel et complexe









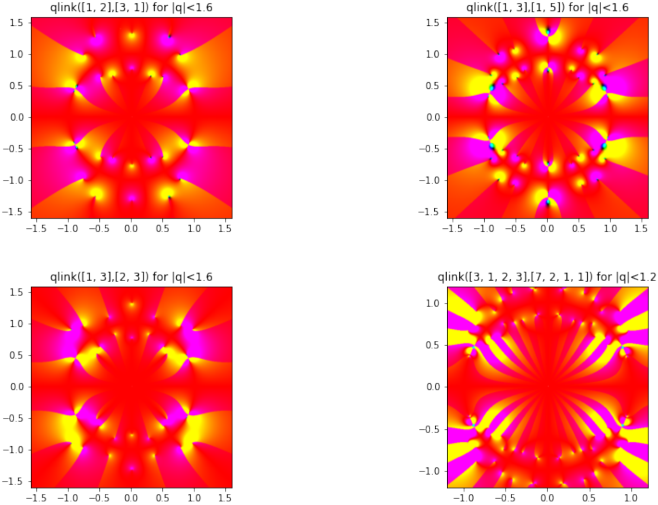
$L_q(A, B)$ et $L_q(A, {}^tB)$ pour $A = B = RL^8$ et ${}^tB = R^8L$.

Morale de l'histoire...

Ne méprisons pas les trèfles à trois feuilles :
ils recèlent eux aussi, encore bien des mystères...

Région
Hauts-de-France

Encore des graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q complexe



$L_q(A, B)$ pour diverses valeurs de A et B.