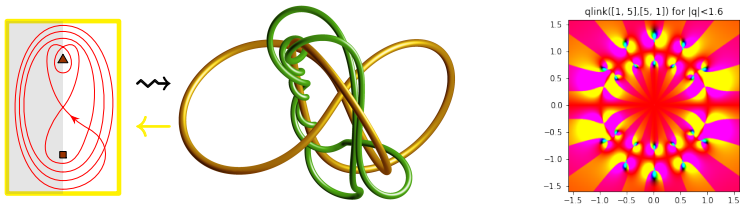


Arithmétique et Topologie des Nœuds Modulaires

Christopher-Lloyd Simon

The Pennsylvania State University

Le séminaire virtuel francophone Groupes et Géométrie de l'UJF
2022-12-22



Sommaire

Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

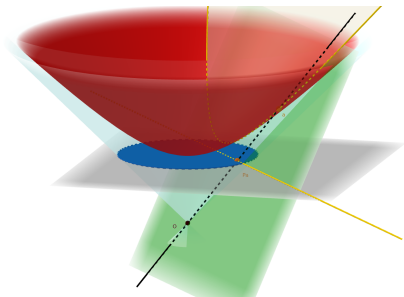
Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des isométries du plan hyperbolique \mathbb{PH}

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right. \\ \left. ad - bc = 1 \right\} \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right. \\ \left. a+d=0 \right\}$$

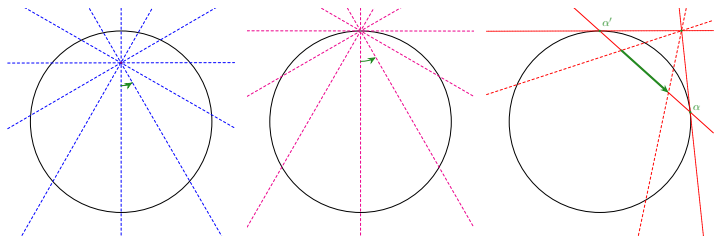
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm 1\} \quad \mathbb{H} = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \mid \det(\mathfrak{a}) = 1\}$$



Projectification de l'hyperboloïde à deux nappes $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{PH}$

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des isométries du plan hyperbolique \mathbb{PH}

$$A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \quad \curvearrowright \quad \mathfrak{a} \in \mathbb{PH} \quad : \quad A \cdot \mathfrak{a} = A\mathfrak{a}A^{-1}$$

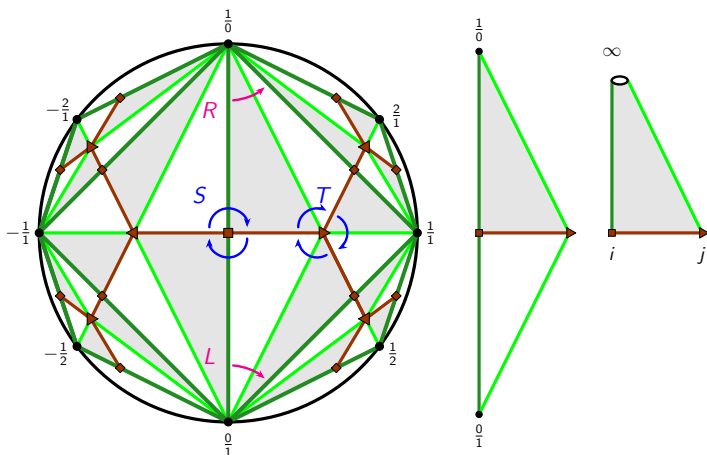


Isométries : **elliptique**, **parabolique**, **hyperbolique**

$$\mathrm{disc}(A) = (\mathrm{Tr} A)^2 - 4 \quad \in \quad [-4, 0[\sqcup \{0\} \sqcup]0, +\infty[$$

Action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}\mathbb{H}$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

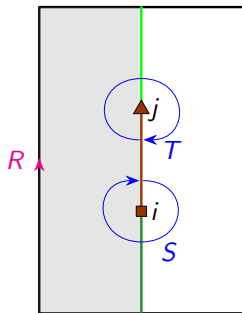
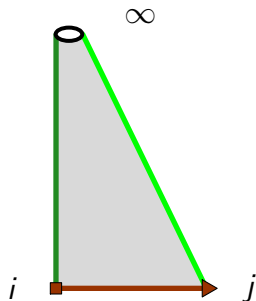


Pavage du plan hyperbolique sous l'action du **groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$**

L'orbifold modulaire $\mathbb{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{P}\mathbb{H}$

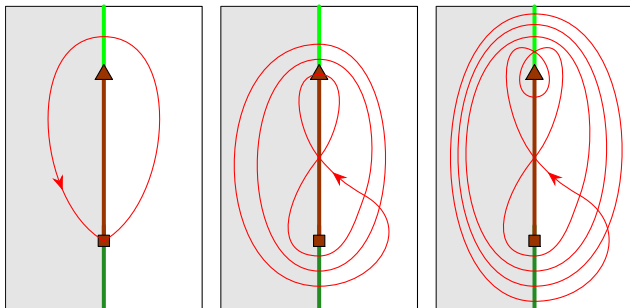
$$\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

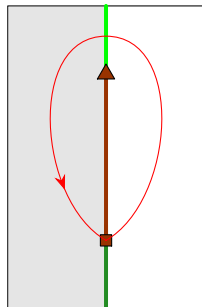
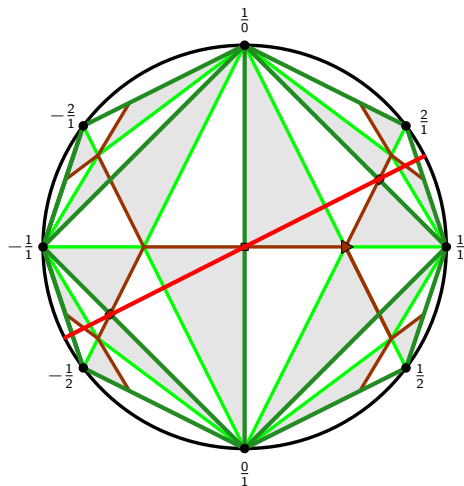


Classes d'homotopies de lacets dans l'orbifold modulaire

Classes d'homotopie libre de lacets orientés dans \mathbb{M}	Classes de conjugaison dans $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
Entoure singularité conique i ou j	Elliptique : S ou $T^{\pm 1}$
Entoure le cusp ∞	Parabolique : $R^n, n \in \mathbb{Z}$
$\exists!$ représentant géodésique γ_A de longueur λ_A	Hyperbolique : $\mathrm{disc}(A) = \left(2 \sinh \frac{\lambda_A}{2}\right)^2$

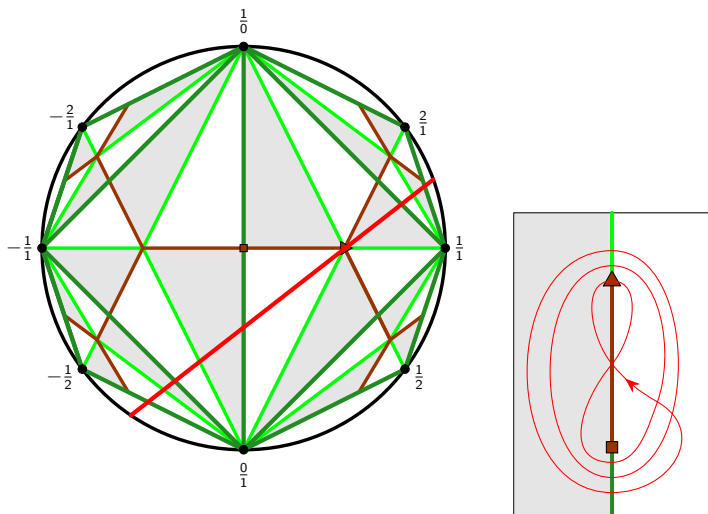


Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques



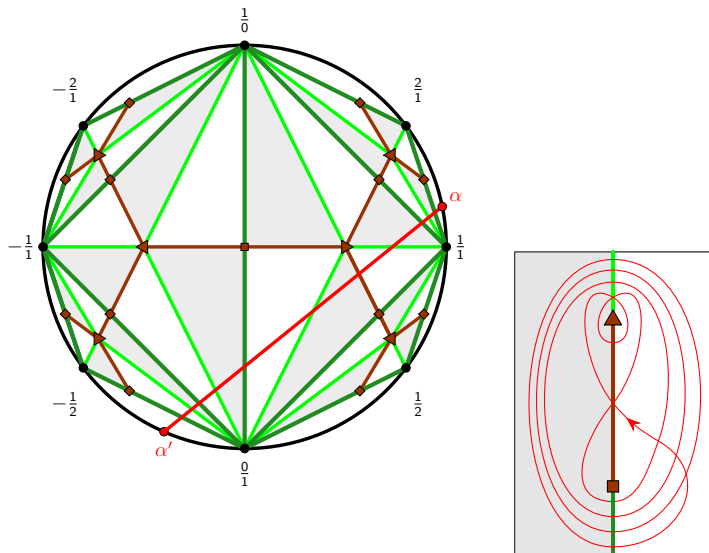
L'axe de $A = RL$ dans $\mathbb{P}H$ se projète sur γ_A dans \mathbb{M} .

Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques



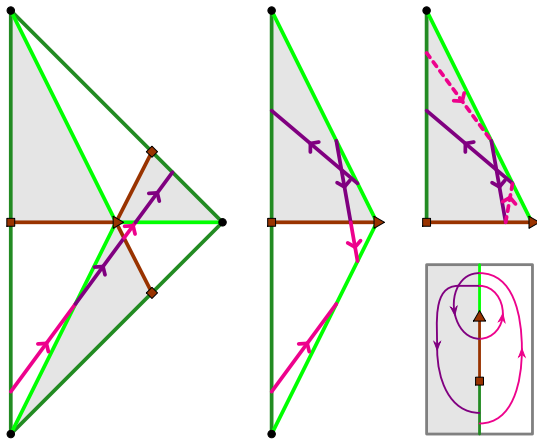
L'axe de $A = RLL$ dans $\mathbb{P}H$ se projète sur γ_A dans \mathbb{M} .

Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques



L'axe de $A = RLLL$ dans \mathbb{PHI} se projète sur γ_A dans \mathbb{M} .

Géodésiques modulaires : projections des axes hyperboliques



Projection d'une portion de l'axe encodée par $S^{-1}T^{-2}S^{-1}$.

Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

Groupes de classes $Cl(\Delta)$ de discriminant Δ

$$\begin{array}{l} \text{M\^eme longueur} \\ \lambda(\gamma_A) = \lambda(\gamma_B) \end{array} \iff \begin{array}{l} \text{M\^eme discriminant} \\ \text{disc}(A) = \text{disc}(B) \end{array} \iff \begin{array}{l} \text{Conjugu\^ees sur } \mathbb{C} \\ \exists C \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}): \\ CA = BC \end{array}$$

Les classes $Cl(\Delta)$ de cette relation d'\u00e9quivalence ont :

- ▶ *des cardinaux finis,*
(Lagrange 1775 : r\u00e9duction des formes quadratiques)
- ▶ *des cardinaux non born\u00e9s,*
(Horowitz 1972 : relations de trace dans SL_2)
- ▶ *et des structures de groupes ab\u00e9liens.*
(Gauss 1801 : composition des formes quadratiques)

Équivalence \mathbb{K} -arithmétique

Définition :

Pour une extension \mathbb{K} du corps des rationnels \mathbb{Q} :

$$\begin{array}{l} A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\ \mathbb{K}\text{-équivalentes} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{définition} \\ \iff \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Conjuguées sur } \mathbb{K} \\ \exists C \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) : \\ CA = BC \end{array}$$

Remarques et conséquences :

- ▶ La \mathbb{K} -équivalence entraîne en particulier $\mathrm{disc}(A) = \mathrm{disc}(B)$.
- ▶ Le relation d'équivalence la plus fine est la \mathbb{Q} -équivalence.

Questions :

1. Comprendre le groupement des $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -classes en \mathbb{K} -classes.
2. Formulations **géométrique** & **arithmétique** de la \mathbb{K} -équivalence.

Interprétation arithmético-géométrique de la \mathbb{K} -équivalence

Théorème : \mathbb{K} -équivalence des géodésiques modulaires

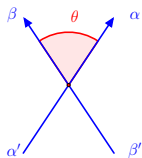
$A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de discriminant $\Delta > 0$ sont \mathbb{K} -équivalentes \iff

$\gamma_A, \gamma_B \subset \mathbb{M}$ satisfont les conditions équivalentes suivantes :

θ : \exists un point d'intersection d'angle $\theta \in]0, \pi[$ tel que :

$$\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 = X^2 - \Delta Y^2 \quad \text{pour } X, Y \in \mathbb{K}$$

auquel cas c'est vrai \forall point d'intersection.



Angle bien défini dans $]0, \pi[$.

Interprétation arithmético-géométrique de la \mathbb{K} -équivalence

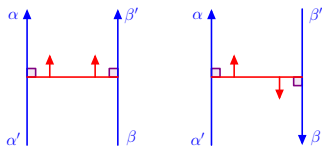
Théorème : \mathbb{K} -équivalence des géodésiques modulaires

$A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de discriminant $\Delta > 0$ sont \mathbb{K} -équivalentes \iff
 $\gamma_A, \gamma_B \subset \mathbb{M}$ satisfont les conditions équivalentes suivantes :

λ : \exists une ortho-géodésique co-orientée de longueur λ telle que :

$$\left(\cosh \frac{\lambda}{2}\right)^2 = X^2 - \Delta Y^2 \quad \text{pour } X, Y \in \mathbb{K}$$

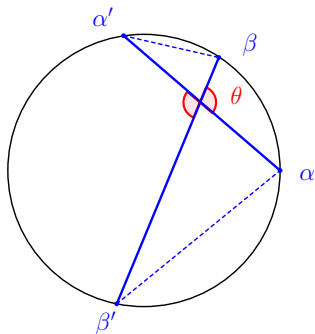
auquel cas c'est vrai \forall ortho-géodésique co-orientée.



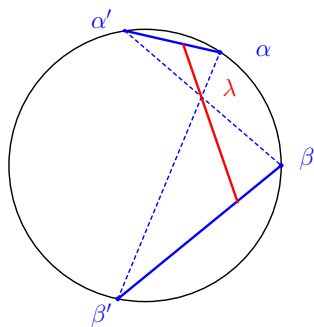
Ortho-géodésiques bien et mal co-orientées.

Preuve géométrique : action adjointe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$

$$\begin{array}{l}
 C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \\
 AC = CB
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{l}
 (x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 x^2 - \frac{1}{4}\Delta y^2 = \chi
 \end{array}$$



$$\frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha', \alpha, \beta', \beta)} = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2$$



$$\frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha', \alpha, \beta', \beta)} = \left(\cosh \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

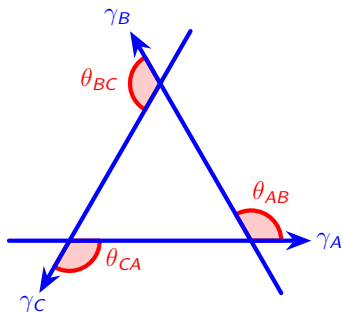
Remarques :

- ▶ On demande que les quantités $c^2 = 1/bir$ appartiennent au groupe des normes de l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{K}$.
- ▶ Classes de conjugaison symétriques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{l} A = CA^{-1}C \\ \gamma_A = \gamma_{A^{-1}} \end{array} \iff \begin{array}{l} \gamma_A \text{ passe par } i \\ [i] \in \gamma_A \subset \mathbb{M} \end{array} \implies \begin{array}{l} c^2 \text{ et } 1 - c^2 \in \\ \text{Norm}(\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{Q}) \end{array}$$

Remarques :

- ▶ On demande que les quantités $c^2 = 1/\text{bir}$ appartiennent au groupe des normes de l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{K}$.
- ▶ Relation d'équivalence : pour chaque $\Delta > 0$, les propriétés sur les angles et les ortho-géodésiques sont transitives !



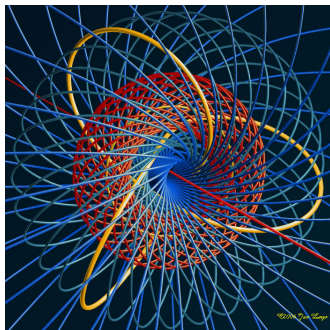
Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

Équivalence arithmétique des géodésiques modulaires

Enlacement des nœuds modulaires

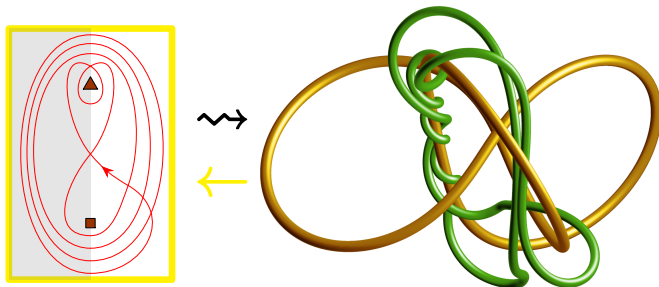
Fibré tangent unitaire \mathbb{U} à l'orbifold modulaire \mathbb{M}

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbb{U} \\ \downarrow \mathbb{S}^1 & & \downarrow \mathbb{S}^1 \\ \mathbb{P}\mathbb{H} & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbb{M} \end{array}$$



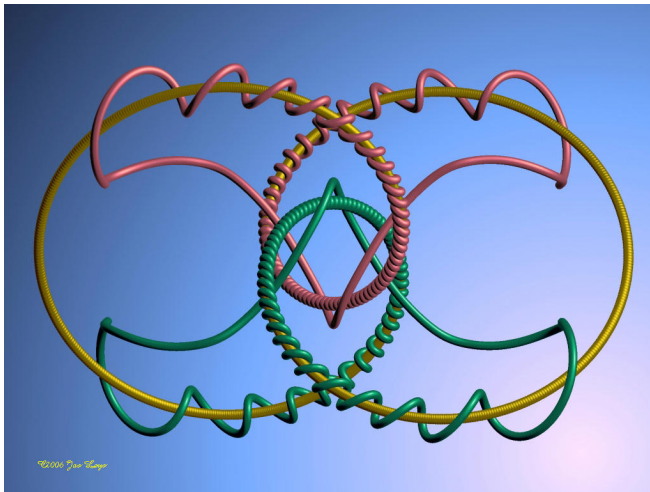
Nœuds modulaires dans \mathbb{U}

Classes de conjugaison hyperboliques primitives de $\pi_1(\mathbb{M}) = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$	Géodésiques modulaires primitives dans \mathbb{M}	Orbites périodiques primitives dans \mathbb{U}
---------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------	--------------------------------------------------



Les géodésiques modulaires γ_A se relèvent en des nœuds modulaires k_A

Comprendre la topologie de *l'entrelacs modulaire maître*



Deux nœuds modulaires qui s'enlacent dans le complémentaire du trèfle.

Classes de conjugaison et mots binaires cycliques

Monoïde Euclidien

$$R = TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = T^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Group}(L, R) \quad \supset \quad \mathrm{SL}_2(\mathbb{N}) = \mathrm{Monoïde}(L, R)$$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Group}(L, R) \quad \supset \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N}) = \mathrm{Monoïde}(L, R)$$

Classe de conjugaison $[A]$ d'un $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre infini :

- ▶ $[A] \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$: permutations cycliques d'un $L&R$ -mot $\neq \emptyset$.
- ▶ Classe primitive \iff mot cyclique primitif.
- ▶ Classe hyperbolique $\iff \#L > 0$ et $\#R > 0$.

Combinatoire des mots \leftrightarrow Topologie des entrelacs

Définition : invariants combinatoires

Pour la classe de conjugaison de $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$ on définit

- ▶ sa longueur combinatoire $\mathrm{len}([A]) = \#R + \#L$
- ▶ son nombre de Rademacher $\mathrm{Rad}([A]) = \#R - \#L$

Théorème [Ghys 2006] :

Pour toute classe de conjugaison hyperbolique $[A]$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{Rad}([A]) = \mathrm{lk}(\text{trèfle}, k_A)$$

Question [Ghys 2006] :

Interprétation arithmétique de l'enlacement $\mathrm{lk}(k_A, k_B)$
entre deux nœuds modulaires k_A, k_B ?

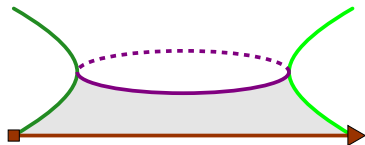
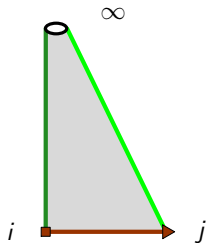
Définition : « série de Poincaré bivariée »

Pour $A, B \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques, on définit la somme :

$$L_1([A], [B]) := \sum (\cos \frac{\theta}{2})^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

portant sur les angles aux points d'intersection $\gamma_A \cap \gamma_B$.

Déformons la métrique hyperbolique de \mathbb{M} en ouvrant le cusp...



L'orbifold $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1$ et sa déformation \mathbb{M}_q avec $q = (2 \sinh \frac{\lambda}{2})^2$

Variété des caractères $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$

Caractères des représentations Fuchsiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Métriques hyperboliques} \\ \text{complètes sur } \mathbb{M} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \\ \rho \text{ fidèle \& discrète} \end{array} \right\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

- ▶ Tore algébrique réel de dim 1, paramétré par $q \in \mathbb{R}^*$.
- ▶ La matrice $A_q = \rho_q(A)$ s'obtient d'une factorisation de A en un produit de L & R en remplaçant L par L_q et R par R_q où

$$L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix} \quad R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\rho_q: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$$

La q -série de Poincaré bivariée $L_q(A, B)$

Classes de conjugaison d'ordre infini (hyperbolique) de $\pi_1(\mathbb{M}_q) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	Géodésique orientée fermée (non cuspidale) de $\mathbb{M}_q = \rho_q(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})) \backslash \mathbb{P}\mathbb{H}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Définition : « q -série de Poincaré bivariée »

Pour $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques, définissons la fonction :

$$L_q([A], [B]) := \sum (\cos \frac{1}{2}\theta_q)^2 \in \sqrt{\mathbb{Q}(q)}$$

où la somme porte sur les angles d'intersections θ_q des géodésiques q -modulaires $\gamma_{A_q}, \gamma_{B_q} \subset \mathbb{M}_q$.

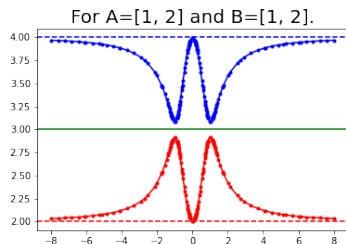
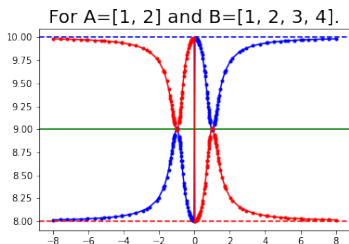
Cela définit une fonction de $q \in \mathbb{R}^*$, ou sur $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$.

L'enlacement s'évalue au bord de la variété des caractères

Théorème : Enlacement comme évaluation de L_q au bord de X

La limite de $q \mapsto L_q([A], [B])$ au bord de la variété des caractères retrouve l'enlacement des nœuds modulaires associés à A et B :

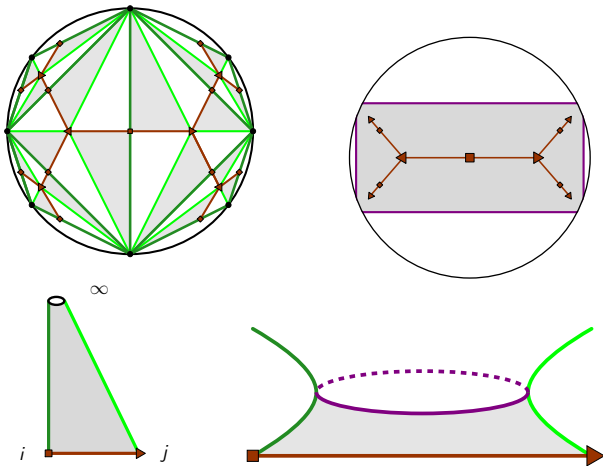
$$L_q([A], [B]) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 2 \text{lk}(k_A, k_B).$$



$L_q(A, B)$ interpole entre l'arithmétique en 1 et la topologie en $+\infty$.

Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent \mathcal{T}

1. Relevons le cœur convexe de \mathbb{M}_q dans \mathbb{PH} : $\frac{1}{q^2}$ -voisinage de \mathcal{T}_q .



2. La représentation ρ_q tend vers l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{T} .

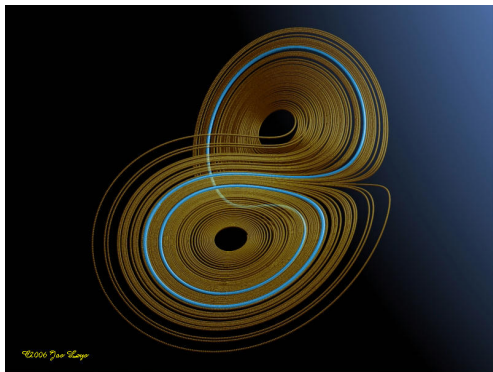
Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent \mathcal{T}

3. Les angles $\theta_q \rightarrow 0 \pmod{\pi}$ donc $\cos(\theta_q) \rightarrow \pm 1$.
4. La somme $L_q(A, B)$ compte les paires d'axes $(+1, +1)$:

		cross		
		+1	0	0
cosign	+1			
	-1			

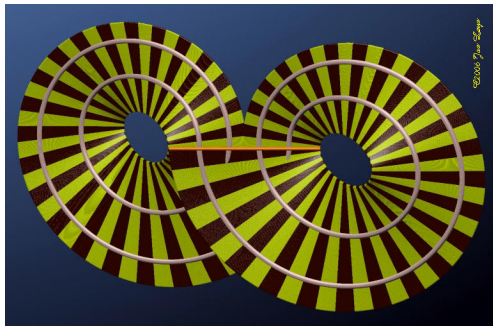
Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent \mathcal{T}

5. Dans le fibré tangent unitaire de \mathbb{M}_q , l'entrelacs q -modulaire maître est isotopé dans le patron de Lorenz (surface branchée).



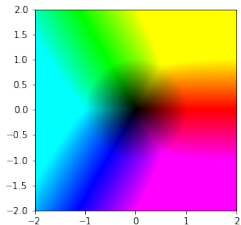
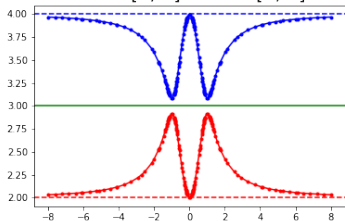
Preuve par l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent \mathcal{T}

6. On retrouve une formule algorithmique pour l'enlacement en termes des L & R -cycles, utilisée par Pierre Dehornoy (2011).

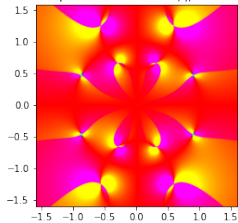


Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q réel et complexe

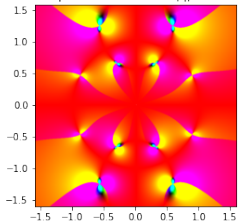
For $A=[1, 2]$ and $B=[1, 2]$.



qlink([1, 2],[1, 2]) for $|q| < 1.6$



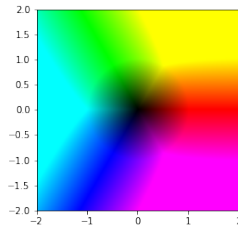
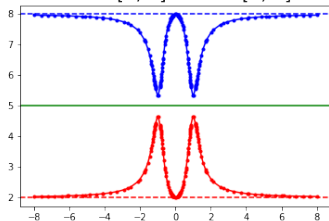
qlink([1, 2],[2, 1]) for $|q| < 1.6$



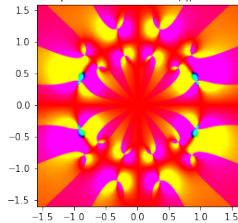
$L_q(A, B)$ et $L_q(A, {}^tB)$ pour $A = B = RLL$ et ${}^tB = RRL$.

Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q réel et complexe

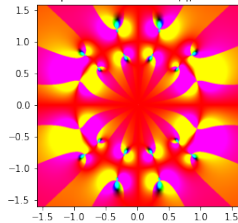
For $A=[1, 4]$ and $B=[1, 4]$.



qlink([1, 4],[1, 4]) for $|q| < 1.6$



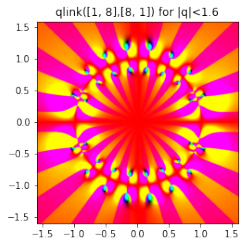
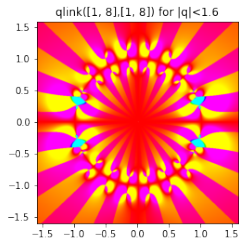
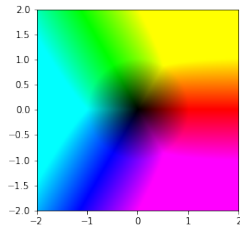
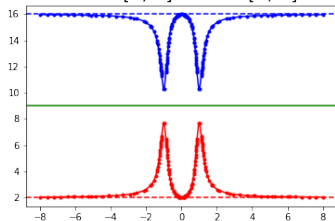
qlink([1, 4],[4, 1]) for $|q| < 1.6$



$L_q(A, B)$ et $L_q(A, {}^tB)$ pour $A = B = RL^4$ et ${}^tB = R^4L$.

Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q réel et complexe

For $A=[1, 8]$ and $B=[1, 8]$.



$L_q(A, B)$ et $L_q(A, {}^tB)$ pour $A = B = RL^8$ et ${}^tB = R^8L$.

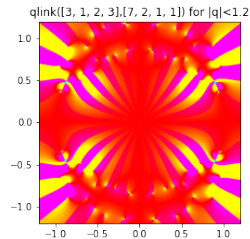
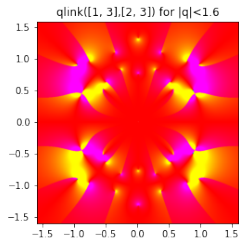
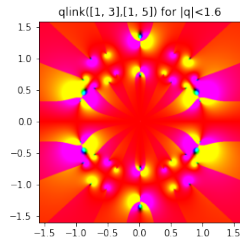
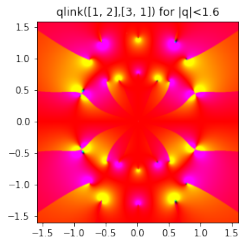
Morale de l'histoire...

*Ne méprisons pas les trèfles à trois feuilles :
ils recèlent eux aussi, encore bien des mystères...*



Région
Hauts-de-France

Encore des graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour q complexe



$L_q(A, B)$ pour diverses valeurs de A et B .