



# Base des pseudocaractères du groupe modulaire via l'enlacement des nœuds modulaires

Christopher-Lloyd Simon

Institut de Mathématique de Rennes

2026

# Plan

- 1 L'espace des pseudocaractères d'un groupe
- 2 Classes de conjugaison du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Base de pseudocaractères via l'enlacement des nœuds modulaires
- 4 L'enlacement comme limite d'une fonction sur la variété des caractères

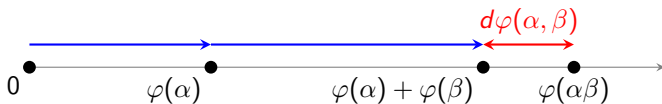
# L'espace des pseudocaractères $PX(\Gamma; \mathbb{R})$

**Définition :** pseudocaractère = quasicaractère homogène

Une fonction  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est un **quasicaractère** lorsque son cobord est borné :

$$d\varphi: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad d\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha\beta) + \varphi(\alpha) \quad \|d\varphi\|_\infty < \infty$$

et de plus **homogène** si  $\forall \gamma \in \Gamma$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\varphi(\gamma^n) = n\varphi(\gamma)$ .



$PX \implies$  invariant par conjugaison ; nul sur la torsion ; non-borné ou nul.

**Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des pseudocaractères  $PX(\Gamma; \mathbb{R})$  :**

muni d'une **semi-norme**  $\|d\varphi\|_\infty$  et  $\ker \|d\varphi\|_\infty = X(\Gamma; \mathbb{R}) \subset PX(\Gamma; \mathbb{R})$

Le quotient  $PX'(\Gamma; \mathbb{R}) = PX(\Gamma; \mathbb{R})/X(\Gamma; \mathbb{R})$  est un **Banach** ! [MM85, Iva88]

mais on considère ici la **topologie convergence ponctuelle** ( $\star_c$ -faible)

# Nombre de translation de Poincaré $\tau$ : $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$

## Nombre de translation de Poincaré est un pseudocaractère

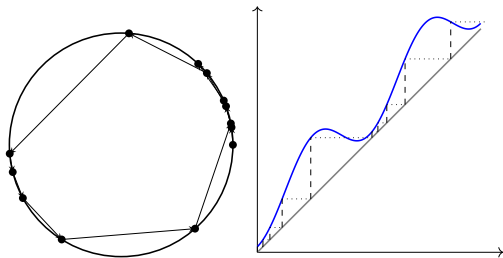
Le groupe  $\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  n'est pas simplement connexe :  
il se rétracte par déformation sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (agissant par translation).

Revêtement universel  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \widetilde{\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} \twoheadrightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  (ext centrale)

On identifie  $\widetilde{\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} = \text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ .

Pour  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , relève  $\tilde{f} \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$  et pose  $\tau(f) = \lim \frac{f^n(x) - x}{n}$ .

On a  $\tau: \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  homogène et  $\text{im}(d\tau) \in \{-1, 0, 1\}$ .



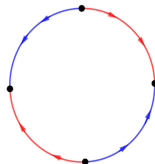
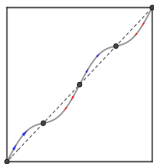
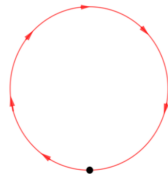
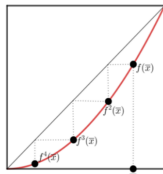
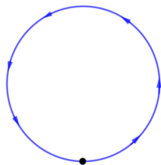
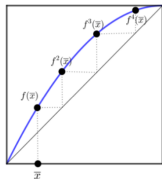
# Translation de Poincaré engendre $PX(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$

Nombre de translation de Poincaré engendre  $PX(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{R}$

Pour  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , relève  $\tilde{f} \in \text{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$  et pose  $\tau(f) = \lim \frac{f^n(x) - x}{n}$ .

On a  $\tau: \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  homogène et  $\text{im}(d\tau) \in \{-1, 0, 1\}$ .

Le pseudocaractère  $\tau: \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  engendre  $PX(\text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}); \mathbb{R})$ .

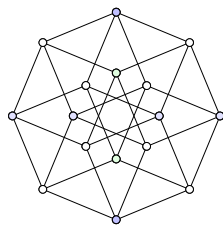
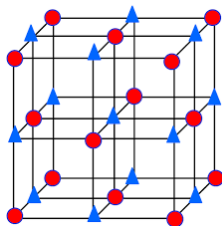
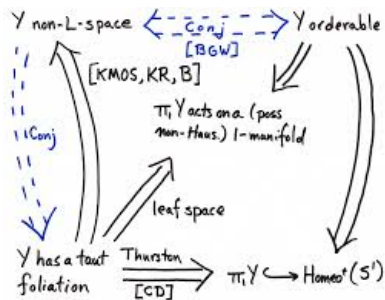


# Actions de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} =$ sommets du cube unité de $PX(\Gamma)$

**Théorème : actions de  $\Gamma$  sur le cercle dans  $PX(\Gamma; \mathbb{R})$  [Ghy87, MM85]**

Pour  $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbf{S}^1)$  on a  $\varphi = \rho^* \tau \in PX(\Gamma; \mathbb{R})$  et  $\text{im}(d\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$ .

Réciproquement un tel **sommet du cube unité**  $\varphi \in PX(\Gamma; \mathbb{R})$ , provient d'une unique **représentation**  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma; \text{Homeo}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  modulo semi-conjugaison.



# Constructions : extensions moyennables et amalgames

Si  $\Gamma$  moyennable alors  $PX'(\Gamma) = 0$ . Par extension  $Fibre \twoheadrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow Base$  :

Si  $Base$  est moyennable alors  $PX'(\Gamma) = PX'(Fibre)$

Si  $Fibre$  est moyennable alors  $PX'(\Gamma) = PX'(Base)$

Pour  $\Gamma$   $n$ -engendré ( $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma : \gamma_1^{\mathbb{Z}} \dots \gamma_n^{\mathbb{Z}} = \Gamma$ ) :  $\dim PX'(\Gamma) \leq n$ .

Par exemple pour  $SL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$  avec  $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] < \infty$  pour  $n \geq 3$ .

Pour un amalgame  $\Gamma = A * B$

On a  $PX(\Gamma) = PX(A) + PX(B) + PX([A, B])^{\Gamma}$  où :

$\Gamma \triangleright [A, B]$  librement engendré par  $C := \{[\alpha, \beta] : \alpha \in A \setminus \mathbf{1}, \beta \in B \setminus \mathbf{1}\}$ .

Action par conjugaison  $AD : \Gamma \rightarrow \text{Int}(\Gamma) \rightarrow \text{Aut}([A, B])$

$PX([A, B])^{\Gamma} := \{\varphi \in PX([A, B]) : \|\varphi|_C\| < \infty, \forall \gamma \in \Gamma : \varphi \circ AD_{\gamma} = \varphi\}$

# Longueur des commutateurs stable et dualité de Bavard

## Longueur des commutateurs stable $\text{scl}: \Gamma' \rightarrow \mathbb{R}$

Pour  $\gamma \in \Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$  on définit la longueur des commutateurs et sa stabilisation :

$$\text{cl}(\gamma) = \min\{l \in \mathbb{N} : \gamma = [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_l, \beta_l], \alpha_i, \beta_i \in \Gamma\}$$

$$\text{scl}(\gamma) = \inf \frac{1}{n} \text{cl}(\gamma^n) = \lim \frac{1}{n} \text{cl}(\gamma^n)$$

## Théorème de dualité de Bavard [Bav91] entre $\text{scl}(\gamma')$ et $\|d\varphi\|_\infty$

$$\text{Pour } \gamma' \in \Gamma' \text{ on a } \text{scl}(\gamma') = \sup \left\{ \frac{|\varphi(\gamma')|}{2\|d\varphi\|_\infty} : \varphi \in \text{PX}(\Gamma; \mathbb{R}) \setminus \text{X}(\Gamma; \mathbb{R}) \right\}$$

(Ce sup est réalisé, non-constructivement, par Hahn-Banach.)

Corollaire :  $\text{scl}(\Gamma') = \{0\} \iff \text{PX}'(\Gamma) = \{0\}$ .

En particulier si  $\Gamma$  uniformément parfait ( $\text{cl}(\Gamma') < \infty$ ) alors  $\text{PX}'(\Gamma) = \{0\}$ , par exemple pour  $\text{SL}_n(\text{Corps})$  et  $\text{SL}_n(\text{PID})$  avec  $n \geq 3$ .

# De la dimension infinie à la description d'une base

Pour de nombreux groupes  $\Gamma$ , on sait montrer  $\dim PX'(\Gamma) = \infty$  :

Pour  $\Gamma$  Gromov-hyperbolique non-élémentaire [EF97]

Pour  $\Gamma = \text{Mod}(\mathbf{F}_{g,n})$  avec  $3g - 3 + n > 0$  [BF02, Fuj09].

## Définition : base de Schauder d'un espace vectoriel topologique

Dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel topologique  $\mathcal{H}$ , une suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une *base* lorsque

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \exists! (c_n(f)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad f = \sum_n c_n(f) \cdot e_n,$$

de *Schauder* lorsque chaque **fonctionnelle coefficient**  $c_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

## Objectif : Pour $\Gamma = \pi_1(\mathbf{F}_{g,n,s})$ trouver un base de Schauder $PX'(\Gamma)$

La base devra être indexée par  $\mathcal{P}(\Gamma)$  : les **éléments d'ordre infini de  $\Gamma$  modulo conjugaison et puissances** (= classes d'homotopie lacets primitifs de  $\mathbf{F}_{g,n,s}$ ).

[Gri95] construit la **seule base connue**, de nature combinatoire, reposant sur les quasicharactères de Brooks  $\text{mas}_w(\gamma) = \text{occ}_w(\gamma) - \text{occ}_{w^{-1}}(\gamma)$ .

[Sim25] **découvre** une telle base de nature topologique via les nombres d'enlacement entre nœuds modulaires :  $C_\alpha(\beta) = \text{lk}(\alpha, \beta) - \text{lk}(\alpha, \beta^{-1})$ .

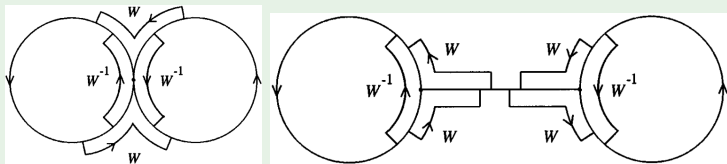
# Base de Schauder combinatoire (de Brooks à Grigorchuk)

## Quasicaractères de Brooks d'un groupe libre [Bro81, BS84, BG91]

Pour  $w, \gamma \in \Gamma$  :  $\text{mas}_w(\gamma) = \text{occ}_w(\gamma) - \text{occ}_{w^{-1}}(\gamma)$

Si  $w$  cycliquement réduit et  $\text{Pre}(w) \cap \text{Suf}(w) = \emptyset$

alors  $\text{mas}_w$  quasicaractère et  $\|d \text{mas}_w\|_\infty \leq 6$



## Grigorchuk [Gri95] : base de Schauder du groupe libre

Partition des classes de conjugaison primitives  $\mathcal{P}_+ \sqcup \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_-$

Pour  $[w] \in \mathcal{P}_+$  choisir  $w$  cycliquement réduit et  $\text{Pre}(w) \cap \text{Suf}(w) = \emptyset$ .

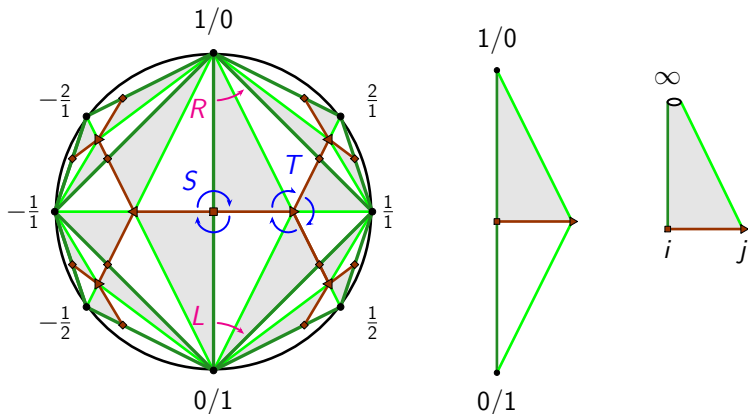
[Gri95]  $(\text{mas}_w)_{w \in \mathcal{P}_+}$  base de Schauder de  $PX(\Gamma)$  pour topo  $\star_c$ -faible.

# Plan

- 1 L'espace des pseudocaractères d'un groupe
- 2 Classes de conjugaison du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Base de pseudocaractères via l'enlacement des nœuds modulaires
- 4 L'enlacement comme limite d'une fonction sur la variété des caractères

# Action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbf{HP}$

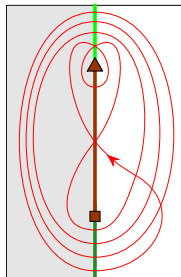
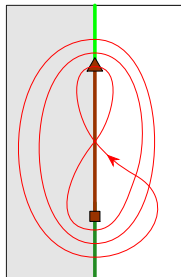
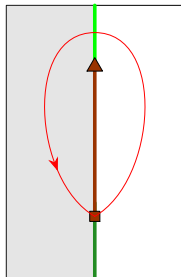
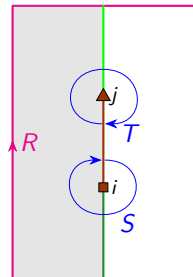
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



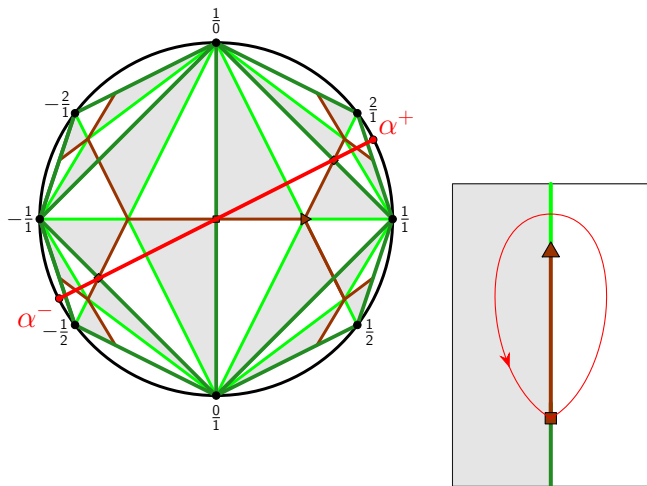
Pavage de  $\mathbf{HP}$  sous l'action du **groupe modulaire**  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ ,  
un domaine fondamental, l'**orbifold modulaire**  $\mathbf{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{HP}$ .

# Lacets de l'orbifold modulaire $\mathbf{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{HP}$

| Classes d'homotopie libre de lacets orientés dans $\mathbf{M}$        | Classes de conjugaison dans $\pi_1(\mathbf{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ |
|---|--|
| Autour d'une singularité conique $i$ ou $j$                           | Elliptique : $S$ ou $T^{\pm 1}$  |
| Tourne $n$ fois autour de la cuspide $\infty$                         | Parabolique : $R^n, n \in \mathbb{Z}$  |
| $\exists!$ représentant géodésique $[\alpha]$ de longueur $\lambda_A$ | Hyperbolique : $\mathrm{disc}(A) = (2 \sinh \frac{\lambda_A}{2})^2$          |

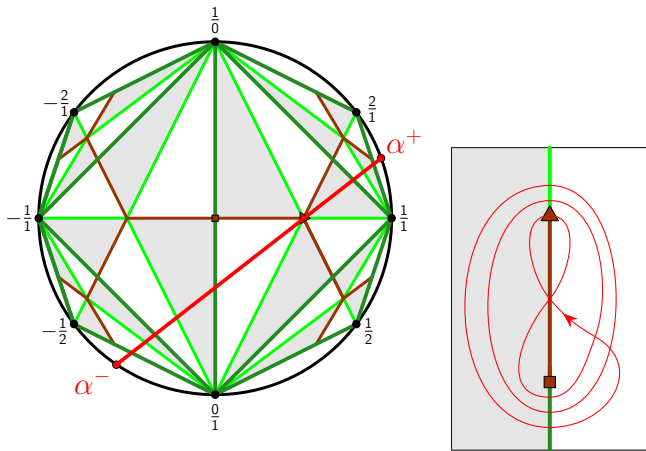


# Géodésiques modulaires = projections d'axes hyperboliques



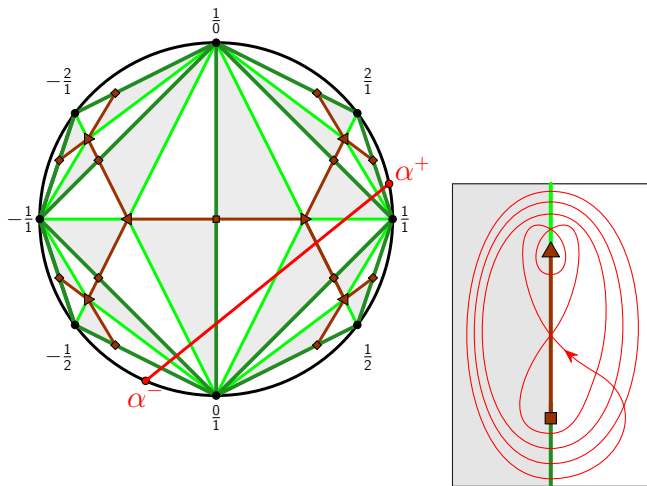
L'axe de  $A = RL$  dans  $\mathbf{HP}$  entre  $\alpha^- = -1/[1,1]$  et  $\alpha^+ = [1,1]$  in  $\mathbb{RP}^1$ .

# Géodésiques modulaires = projections d'axes hyperboliques



L'axe de  $A = RLL$  dans **HP** entre  $\alpha^- = -1/[\overline{2,1}]$  et  $\alpha^+ = [\overline{1,2}]$  dans  $\mathbb{RP}^1$ .

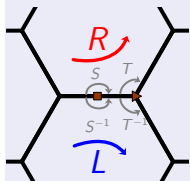
# Géodésiques modulaires = projections d'axes hyperboliques



L'axe de  $A = RLLL$  dans  $\mathbf{HP}$  entre  $\alpha^- = -1/\overline{[3,1]}$  et  $\alpha^+ = \overline{[1,3]}$  dans  $\mathbb{R}P^1$ .

# Classes de conjugaison et mots cycliques binaires

Le monoïde Euclidien  $\text{PSL}_2(\mathbb{N}) = \{L, R\}^*$



Pour  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  on a  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{N}) \iff \alpha^- < 0 < \alpha^+$ .

Pour  $A = R^{a_0} L^{a_1} \dots \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$  on a  $\alpha^+ = \lfloor a_0, a_1, \dots \rfloor$ .

L'axe de  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$  dans  $\mathcal{T}$  bifurque à gauche et à droite selon la suite dictée par sa  $\{L, R\}$ -factorisation.

Pour une classe d'ordre infinie  $[A] \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mod conj}$  on a :

$[A] \cap \text{PSL}_2(\mathbb{N}) =$  permutations cyclique d'un  $L\&R$ -mot  $\neq \emptyset$ .

Classe primitive  $\iff$  mot cyclique est primitif.

Classe hyperbolique  $\iff \#L > 0$  et  $\#R > 0$ .

sa longueur combinatoire est  $\text{len}(A) = \#R + \#L$

son invariant de Rademacher est  $\text{Rad}(A) = \#R - \#L$

# Cocycle Rad : topologie, arithmétique, physique

**Théorème “omnibus” [Ati87].** L'invariant Rad:  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est

- 2 Défaut de signature du fibré en tore  $T_A$  de monodromie  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .
- 3 Cocycle pour la série d'Eisenstein  $E_2$  (ou  $\log \eta$  de Dedekind).
- 5 Valeur spéciale en 0 de la  $L$ -fonction de Shimizu  $L_A(s) = \sum \frac{\mathrm{sign} Q_A(m,n)}{|Q_A(m,n)|^s}$ .

Logarithm of the Dedekind  $\eta$ -Funktion

371

It may now be convenient to summarize all our results in an omnibus theorem:

(5.60) **Theorem.** *Let  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  be hyperbolic. Then the following invariants of  $A$  coincide.*

- 1) Meyer's signature invariant  $\phi(A)$  (see (5.3)).
- 2) Hirzebruch's signature defect  $\delta(A)$ .
- 3) The invariant  $\chi(A)$  describing the transformation properties of  $\log \eta(\tau)$  under  $A$  (see (5.22)).
- 4)  $\mu(A)$  the logarithmic monodromy (divided by  $\pi i$ ) of Quillen's determinant line-bundle  $\mathcal{L}$ .
- 5) The value  $L_A(0)$  of the Shimizu  $L$ -function (see (5.49)).
- 6) The Atiyah-Patodi-Singer invariant  $\eta(A)$ .
- 7) The “adiabatic limit”  $\eta^0(A)$ .

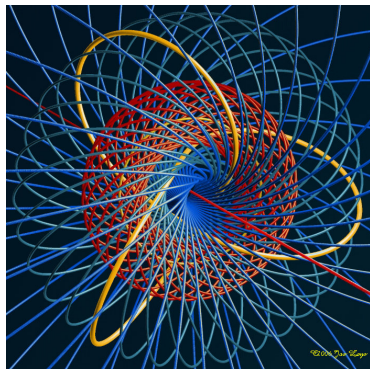
# Plan

- 1 L'espace des pseudocaractères d'un groupe
- 2 Classes de conjugaison du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Base de pseudocaractères via l'enlacement des nœuds modulaires
- 4 L'enlacement comme limite d'une fonction sur la variété des caractères

# Fibré tangent unitaire $\mathbf{U}$ de l'orbifold modulaire $\mathbf{M}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbf{U} \\ \downarrow s^1 & & \downarrow s^1 \\ \mathrm{HP} & \xrightarrow{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathbf{M} \end{array}$$

La fibration de Seifert  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{M}$   
révèle que  $\mathbf{U} \simeq \mathbf{S}^3 \setminus \text{trèfle}(2, 3)$ .

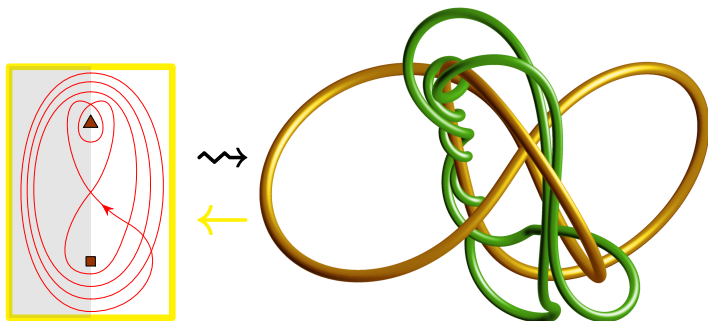


L'extension des groupes fondamentaux  $\pi_1(\mathbf{S}^1) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{U}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{M})$

induit l'extension centrale universelle  $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathcal{B}_3 \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  qui est le quotient du groupe des tresses  $\mathcal{B}_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$  par son centre engendré par  $(\sigma_1 \sigma_2)^6$  envoyant  $\sigma_1^{-1} \mapsto L$  et  $\sigma_2 \mapsto R$ .

# Relever les géodésiques modulaires aux nœuds modulaires

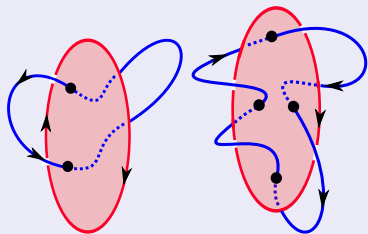
|  |   |  |
|--|---|--|
| Classes hyperboliques<br>de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ | Géodésiques modulaires<br>dans $\mathbf{M}$ | Orbites périodiques<br>dans $\mathbf{U}$ |
| forme trace  | forme d'intersection                        | forme d'enlacement                       |



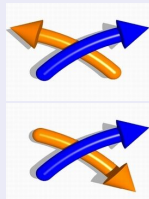
La géodésique modulaire primitive  $[\alpha]$  se relève en le nœud modulaire  $\vec{\alpha}$

# Calculer des nombres d'enlacements de nœuds dans $\mathbf{S}^3$

## Définition topologique et Formule combinatoire



Intersections avec surface de Seifert.



Croisements projection plane

## Formule analytique : Gauss (ZUR ELCTRODYNAMIK, Page 604)

Pour  $(\alpha, \beta): \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$  on a  $\text{lk}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\det(\dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(s), \alpha(s) - \beta(t))}{|\alpha(s) - \beta(t)|^3}$ .

$$\iint \frac{(x'-x)(dy dz' - dz dy') + (y'-y)(dz dx' - dx dz') + (z-z')(dx dy' - dy dx')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = \mathcal{V}$$

# Calculer des nombres d'enlacements de nœuds dans $\mathbf{S}^3$

## Formes de Gauss (invariantes par les symétries de la variété)

Suivant [Ghy09], pour  $\Lambda \in \Omega^{1,1}(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \setminus \Delta)$  tel que  $d\Lambda = \Delta^{(3,0)} + \Delta^{(0,3)}$  :

$$\text{lk}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbf{S}^1} \int_{\mathbf{S}^1} \Lambda(\alpha(s), \beta(t)) \cdot (\dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(t)) ds dt$$

Gauss : Sa forme sur  $\mathbb{R}^3$  est Isom-invariante.

DeTurck–Gluck [DG08] : Formes de Gauss Isom-invariantes sur  $\mathbf{S}^3$  et  $\mathbf{H}^3$ .

**Projet en cours** : Forme de Gauss naturelle pour nœuds Legendriens dans le fibré tangent unitaire d'une surface (Géométries  $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^2$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ,  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ ).

## Passage continu entre ces formules : application zodiaque ([Ghy17])

L'application zodiaque  $\varpi(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^2$ .

Pour tout  $\omega \in \Omega^2(\mathbf{S}^2)$  forme d'aire :  $\text{lk}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbf{T}^2} \varpi(\alpha, \beta)^* \omega$ .

# Enlacement avec trèfle = pseudocaractère de Rademacher

## Théorèmes de [BG92, Ghy07]

Pour  $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperbolique :  $\mathrm{Rad}(A) = \#R - \#L = \mathrm{lk}(\text{trèfle}, \vec{\alpha})$ .

La fonction  $\mathrm{Rad}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est le **pseudocaractère** associé à l'extension centrale  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{B}_3 \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{S}^1) = \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(\mathbf{S}^1) = \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\mathbf{M}') = \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{U}) = \mathcal{B}_3 & \xrightarrow{\mathrm{lk}} & H_1(\mathbf{U}) = \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\mathbf{M}') = \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{Ab}} & H_1(\mathbf{M}) = \mathbb{Z}/6 \end{array}$$

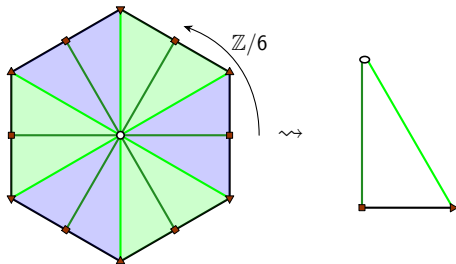
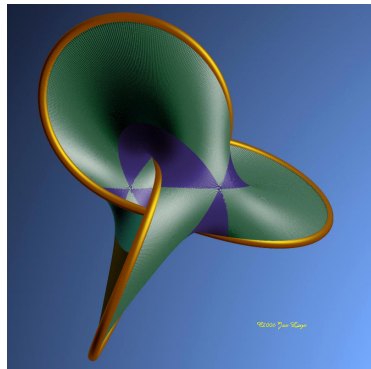
La classe d'Euler dans  $H^2(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$  classifiant l'extension centrale de la colonne du milieu est le tiré en arrière par l'abélianisation  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/6$  de la classe d'Euler  $H^2(\mathbb{Z}/6; \mathbb{Z})$  classifiant l'extension centrale de la colonne de droite.

# Enlacement avec trèfle = pseudocaractère de Rademacher

## Théorèmes de [BG92, Ghy07]

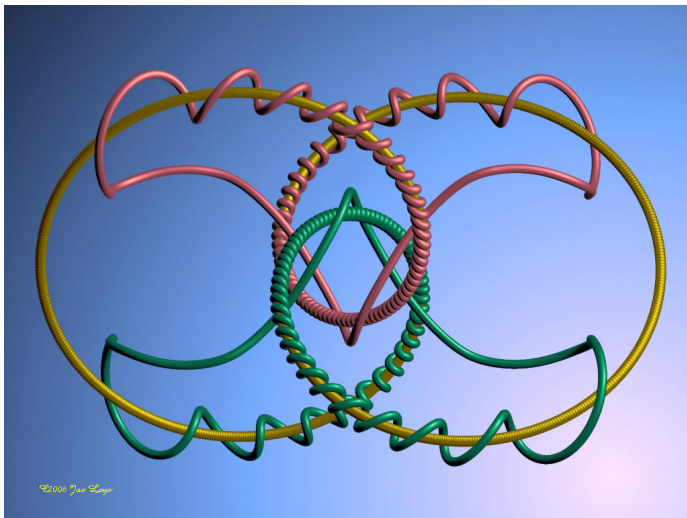
Pour  $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperbolique :  $\mathrm{Rad}(A) = \#R - \#L = \mathrm{lk}(\text{trèfle}, \vec{\alpha})$ .

La fonction  $\mathrm{Rad}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est le **pseudocaractère** associé à l'extension centrale  $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathcal{B}_3 \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .



Pages de la décomposition en livre ouvert. Le revêtement universel abélien  $\mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}$ .

# Qu'en est-il de l'enlacement des nœuds modulaires ?



Another question would be to give an arithmetical or combinatorial computation of the linking numbers of two knots  $k_A$  and  $k_B$  as a function of  $A, B$  in  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Image de Ghys–Léys [GL16]. Question de [Ghy07].

## Base de Schauder de $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ : les cosignus $C_A$

Définition [Sim25, 7.6] : fonction cosign = enlacement antisymétrisé

Pour  $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , définissons sa fonction cosign  $C_A: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  comme son nombre d'enlacement antisymétrisé :  $C_A(B) := (\mathrm{lk}(A, B) - \mathrm{lk}(A^{-1}, B))$ .

Définition : classes de conjugaison modulo puissances

L'ensemble  $\mathcal{P}$  des classes de conjugaison primitives d'ordre infini de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  contient le sous-ensemble  $\mathcal{P}_0$  de celles qui sont stables par inversion.

Partition  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_- \sqcup \mathcal{P}_+$  en deux sous-ensembles bijectés par l'inversion.

Théorème [Sim25] : base de Schauder de  $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$

La famille des  $C_A \in PX(\Gamma; \mathbb{R})$  pour  $A \in \mathcal{P}_+$  est une base de Schauder :

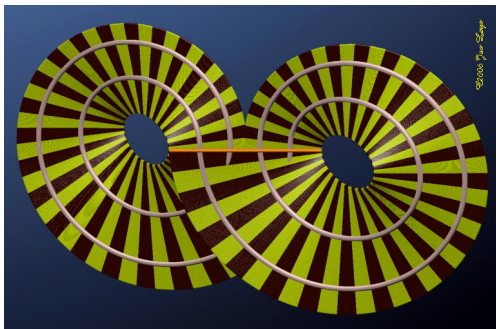
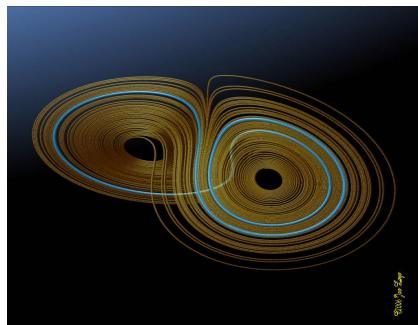
$$\forall f \in PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R}), \quad \exists! (c_A(f))_A \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_+}, \quad f = \sum_A c_A(f) \cdot C_A$$

Les coefficients de période  $c_A: f \mapsto c_A(f)$  sont continus ( $\star_c$ -faible)

Conclusion : Théorie de Fourier des pseudocaractères de  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

# L'entrelacs modulaire isotopé dans le patron de Lorenz

L'entrelacs modulaire s'isotope dans le **patron de Lorenz** de sorte que l'orbite périodique associée à  $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$  bifurque à gauche et à droite selon la suite dictée par sa  $\{L, R\}$ -factorisation.



C'est **montré** [Ghy07] en déformant la représentation Fuchsienne  $\rho_q: \pi_1(\mathbf{M}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  au bord de  $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$  : la cuspidale de  $\mathbf{M}_q$  s'ouvre et son fibré tangent unitaire s'isotope sur celui du patron de Lorenz.

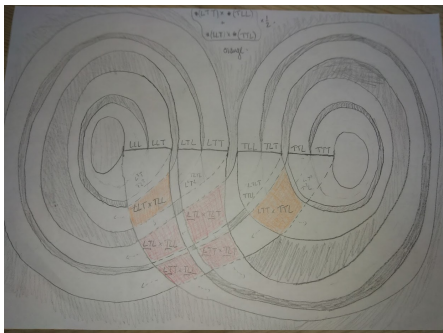
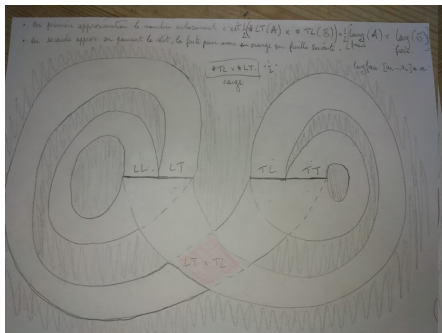
# L'enlacement comme somme de contributions locales

**Lemme [Sim25, 7.1] : l'enlacement compte les motifs entrelacés**

Pour  $A, B \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$  hyperboliques, les nœuds modulaires ont :

$$\text{lk}(A, B) = \frac{1}{2} \sum_w \left( \begin{array}{c} \text{OCC}_{RwL}(A) \cdot \text{OCC}_{LwR}(B) \\ + \\ \text{OCC}_{LwR}(A) \cdot \text{OCC}_{RwL}(B) \end{array} \right)$$

où la somme s'étend sur tous les mots  $w \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$ .



# Pseudocaractères topologiques : enlacement asymétrisés

Corollaire [Sim25, 7.6] : décompose  $C_A$  dans la base des  $(\text{mas}_w)$

Pour  $A, B \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$ , on trouve que  $C_A$  se décompose comme la somme :

$$C_A(B) = \text{lk}(A, B) - \text{lk}(A, B^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_w \begin{pmatrix} \text{occ}_{RwL}(A) \cdot \text{mas}_{LwR}(B) \\ + \\ \text{occ}_{LwR}(A) \cdot \text{mas}_{RwL}(B) \end{pmatrix}$$

sur les mots  $w \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$  avec  $\text{len}(w) < \max\{\text{len } A, \text{len } B\}$ .

Théorème [Sim25, 7.6, 7.7] : Pseudocaractères d'enlacement

Pour  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$  on a  $C_A \in \text{PX}(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$  et  $\|d C_A\|_\infty \leq 6 \text{len}(A)^2$ .

Relations linéaires engendrées par  $C_{A^n} = n C_A$  pour  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

(En particulier  $C_A$  est trivial  $\iff A$  est conjugué à  $A^{-1}$ .)

Lemme [Sim25] : La forme d'enlacement est non-dégénérée

Pour  $A_1, A_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperboliques :  $\text{lk}(A_1, \cdot) = \text{lk}(A_2, \cdot) \implies A_1 = C A_2 C^{-1}$ .  
(Aide à montrer la non-trivialité et l'indépendance linéaire des  $C_A$  pour  $A \in \mathcal{P}_+$ .)

## Base de Schauder de $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ : les cosignus $C_A$

### Théorème [Sim25] : base de Schauder de $PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$

La famille des  $C_A \in PX(\Gamma; \mathbb{R})$  pour  $A \in \mathcal{P}_+$  est une base de Schauder :

$$\forall f \in PX(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{R}), \quad \exists! (c_A(f))_A \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_+}, \quad f = \sum_A c_A(f) \cdot C_A$$

Les coefficients de période  $c_A: f \mapsto c_A(f)$  sont continus ( $\star_c$ -faible)

### Conclusion : Théorie de Fourier des pseudocaractères de $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Base des cosignus  $C_A$  indexée par  $\Gamma$  modulo conjugaison et puissances.

Coefficients  $c_A: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  périodes d'enlacement (formule intégrale?).

### Question : Est-ce que $C_A$ extrémise le sup dans la dualité de Bavard ?

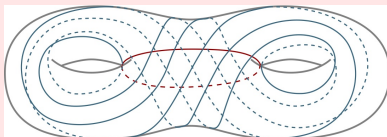
$$\text{Pour } A \in \Gamma' : \text{scl}(A) = \sup \left\{ \frac{|\varphi(A)|}{2\|\varphi\|_\infty} : \varphi \in PX(\Gamma; \mathbb{R}) \setminus X(\Gamma; \mathbb{R}) \right\}$$

L'existence de  $\varphi_A$  extrémal découle non-constructivement de Hahn-Banach...

# Questions et projets : généralisations à d'autres groupes

## Base de Schauder de cosinus $C_A$ pour $PX'(\pi_1(\mathbf{F}_g))$

Grigorchuk [Gri95] a construit une base combinatoire de Brooks ( $\text{mas}_P$ ).



## Base de Schauder pour le groupe des tresses $PX(\text{Mod}(\mathbf{F}_{0,n}))$

**Problem 4.10** To construct a basis for  $H_b^{(2)}(B_n)$ .

[GG05] construisent quasicaractères de signature.

[BF02] cocycles de Brooks via l'action sur complexe des courbes.

Tresses pures :  $\text{PMod}_{n+1} = F_n \rtimes (F_{n-1} \rtimes \dots (F_2 \rtimes F_1))$  et constructions.

Torelli  $\text{TMod}(\mathbb{F}_g) \twoheadrightarrow \text{Mod}(\mathbb{F}_g) \twoheadrightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  (Maslov)

Birman–Series  $\pi_1(\mathbb{F}_{g,n+1}) \twoheadrightarrow \text{Mod}(\mathbb{F}_{g,n+1}) \twoheadrightarrow \text{Mod}(\mathbb{F}_{g,n})$  (récursion)

# Questions et projets : liens avec les formes modulaires

Remarque : L'intersection est la symétrisation de l'enlacement

Pour  $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperboliques :  $lk(A, B) + lk(A^{-1}, B) = \frac{1}{2} i(A, B)$ .

Question : cosignus via les cocycles associés aux formes modulaires ?

[DIT17] construisent une fonction modulaire dont le symbole retrouve  $i(A, \cdot)$ .

Question : cosignus via les produits scalaires de Weil–Peterssen ?

Pour  $A \in \Gamma$  hyperbolique et  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , la série de Poincaré  $\Theta_A^k \in \mathcal{M}_0^{2k}(\Gamma)$  :

$$\Theta_A^k(z) = \sum_{\gamma \in \langle A \rangle \backslash \Gamma} \left( \frac{\gamma'(z)}{Q_A(\gamma z)} \right)^k \quad \text{où} \quad Q_A(z) = \frac{(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)}{(\alpha_+ - \alpha_-)}.$$

Pour  $A, B \in \Gamma$  hyperboliques, définissons leur  $k$ -intersection symplectique :

$$W_k(A, B) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \mathrm{sign}(\theta_p) \times \mathrm{Leg}_k(\cos(\theta_p))$$

D'après [Kat85] on a :

$$W_k(A, B) = 2^{-2k} \binom{2k}{k} \left( \frac{\mathrm{sign}((\mathrm{Tr} A)(\mathrm{Tr} B))}{\sqrt{\mathrm{disc}(A) \mathrm{disc}(B)}} \right)^k \cdot \Im(\langle \Theta_A^{k+1} \mid \Theta_B^{k+1} \rangle).$$

# Dictionnaire quadratique $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ équivariant ([Sim23])

Pour  $\Delta \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$ , correspondances  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  équivariantes :

**Irrationnel quadratique**  $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{\mathbb{N}})$

$$\alpha = \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{2l} \quad \Delta = m^2 - 4lr$$
$$(l, m, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad \gcd(l, m, n) = 1$$

$$\alpha = [M, \bar{P}]$$

$A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  **hyperbolique primitif**

$$A = MPM^{-1} \quad A\alpha = \alpha \quad A'\alpha < 0$$

$$A = t\mathbf{1} + u\mathbf{a} \quad t^2 - \Delta u^2 = 4$$

$$A\mathbf{a}A^{-1} = \mathbf{a} \quad Q \circ A = Q$$

**Forme primitive**  $Q \in \mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z})$

$$Q(x, y) = lx^2 + mxy + ry^2$$

$$\gcd(l, m, r) = 1 \quad \Delta = m^2 - 4lr$$

$$Q(v) = \det(v, \mathbf{a}v) \quad v = (x, y)^\dagger$$

$\mathbf{a} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})^*$  **spatial primitif**

$$\mathbf{a} = \frac{1}{u}(A - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A))$$

$$\Delta = -4\det(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -m/2 & -r \\ l & m/2 \end{pmatrix}$$

Les classes modulo  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  forment le groupe des classes  $\mathrm{Cl}(\Delta)$

# Tables de pseudocaractères au sein d'un groupe de classes

Discriminant  $\Delta = 1596 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$ , groupe  $\text{Cl}(\Delta) \simeq \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ .

|         |              |               |              |
|---------|--------------|---------------|--------------|
| [38, 1] | [3, 1, 2, 3] | [1, 12, 1, 1] | [3, 3, 2, 1] |
| [19, 2] | [7, 2, 2, 1] | [1, 4, 1, 5]  | [7, 1, 1, 2] |

## Matrices des $\text{lk}(A, B)$

$$\begin{pmatrix} 38 & 19 & 5 & 8 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 19 & 20 & 7 & 10 & 4 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 7 & 12 & 10 & 7 & 8 & 13 & 10 \\ 8 & 10 & 10 & 12 & 6 & 6 & 10 & 13 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 16 & 13 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 13 & 18 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 13 & 10 & 7 & 8 & 12 & 10 \\ 8 & 10 & 10 & 13 & 6 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

**Char Poly** :  $x^8 - 140x^7 + 6146x^6 - 104578x^5 + 710426x^4 - 1552764x^3 - 1465458x^2 + 5129834x + 4221237$

**Signature** : [6, 2]

# Tables de pseudocaractères au sein d'un groupe de classes

Discriminant  $\Delta = 1596 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$ , groupe  $\text{Cl}(\Delta) \simeq \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ .

|         |              |               |              |
|---------|--------------|---------------|--------------|
| [38, 1] | [3, 1, 2, 3] | [1, 12, 1, 1] | [3, 3, 2, 1] |
| [19, 2] | [7, 2, 2, 1] | [1, 4, 1, 5]  | [7, 1, 1, 2] |

Matrice des Cosigns  $C_A(B)$

$$\begin{pmatrix} 37 & 17 & 1 & 5 & -11 & -7 & 1 & 5 \\ 17 & 17 & 1 & 5 & -11 & -7 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 5 & -5 & -7 & 1 & 5 \\ -11 & -11 & -2 & -5 & 12 & 9 & -2 & -5 \\ -7 & -7 & -2 & -7 & 9 & 14 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 5 & -5 & -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**CharPoly** :  $x^8 - 92x^7 + 2199x^6 - 18262x^5 + 59948x^4 - 78240x^3 + 33600x^2$

**Signature** : [6, 0]

# Tables de pseudocaractères au sein d'un groupe de classes

Discriminant  $\Delta = 1596 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$ , groupe  $\text{Cl}(\Delta) \simeq \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ .

|         |              |               |              |
|---------|--------------|---------------|--------------|
| [38, 1] | [3, 1, 2, 3] | [1, 12, 1, 1] | [3, 3, 2, 1] |
| [19, 2] | [7, 2, 2, 1] | [1, 4, 1, 5]  | [7, 1, 1, 2] |

Matrices des  $1/2$  intersections  $\frac{1}{2} i(A, B)$

$$\begin{pmatrix} 39 & 21 & 9 & 11 & 15 & 11 & 9 & 11 \\ 21 & 23 & 13 & 15 & 19 & 15 & 13 & 15 \\ 9 & 13 & 23 & 19 & 16 & 18 & 25 & 19 \\ 11 & 15 & 19 & 19 & 17 & 19 & 19 & 21 \\ 15 & 19 & 16 & 17 & 20 & 17 & 16 & 17 \\ 11 & 15 & 18 & 19 & 17 & 22 & 18 & 19 \\ 9 & 13 & 25 & 19 & 16 & 18 & 23 & 19 \\ 11 & 15 & 19 & 21 & 17 & 19 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

**Char Poly** :  $x^8 - 188x^7 + 7491x^6 - 79654x^5 + 179112x^4 + 690672x^3 - 1729744x^2 - 1579616x + 3366656$

**Signature** : [6, 2]

## Morale de cette histoire...

*Ne méprisons pas les trèfles à trois feuilles :  
ils recèlent eux aussi encore bien des mystères.*



**Région**  
**Hauts-de-France**

# Plan

- 1 L'espace des pseudocaractères d'un groupe
- 2 Classes de conjugaison du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$
- 3 Base de pseudocaractères via l'enlacement des nœuds modulaires
- 4 L'enlacement comme limite d'une fonction sur la variété des caractères

# Variété des caractères $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$

## Caractères des représentations Fuchsiennes :

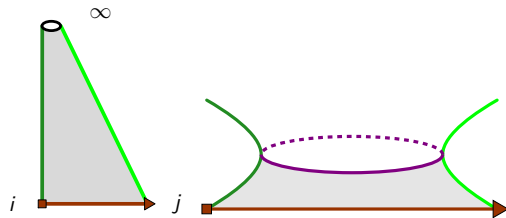
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Métriques hyperboliques} \\ \text{complètes sur } \mathbf{M} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Monodromie}} \\ \xrightarrow{\text{Quotient}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \rho: \pi_1(\mathbf{M}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \\ \rho \text{ fidèles \& discrètes} \end{array} \right\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

Algébriquement paramétré par  $q \in \mathbb{R}^*$  (tore algébrique réel de dimension 1).

La matrice  $A_q = \rho_q(A)$  s'obtient d'une  $L$ & $R$ -factorisation remplaçant  $L, R$  par :

$$L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix} \quad R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Représentation universelle  $\rho_q: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$  (Burau–Squier)



Classes de conjugaison

d'ordre infinis dans

$$\pi_1(\mathbf{M}_q) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

$\longleftrightarrow$

Géodésiques fermées de

$$\mathbf{M}_q = \rho_q(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})) \backslash \mathbf{HP}$$

L'orbifold  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$  et sa déformation  $\mathbf{M}_q$  avec  $q = (2 \sinh \frac{\lambda}{2})^2$

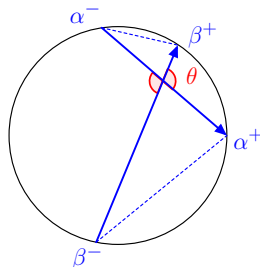
# Série d'Alexander-Poincaré bivariée $L_q(A, B)$

**Définition :** « série d'Alexander-Poincaré de  $q$ -enlacement »

Pour  $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperbolique, définissons la somme :

$$L_q([A], [B]) := \sum (\cos \frac{1}{2}\theta_q)^2 \in \sqrt{\mathbb{Q}(q)}$$

sur les intersections d'angles  $\theta_q$  des géodésiques  $q$ -modulaires  $[\alpha_q], [\beta_q] \subset \mathbf{M}_q$ .  
Cela définit une fonction de  $q \in \mathbb{R}^*$ , c'est-à-dire sur  $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ .



Intersection d'angle  $\theta_q \in (-\pi, \pi)$  a  $(\cos \frac{1}{2}\theta_q)^2 = 1/[\alpha_q^-, \alpha_q^+; \beta_q^-, \beta_q^+]$ .

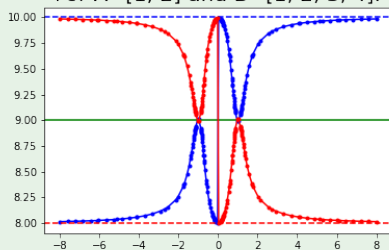
# L'enlacement au bord de la variété des caractères

**Théorème [Sim22]** : L'enlacement comme limite de  $L_q$  en  $+\infty \in \partial X$

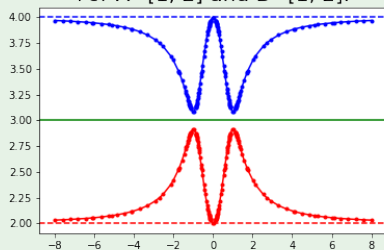
Pour  $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  hyperboliques, la fonction  $q \mapsto L_q([A], [B])$  interpole entre la géométrie-arithmétique à  $q = 1$  et la topologie-algébrique à  $q = +\infty$  :

$$L_q(A, B) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 2 \mathrm{lk}(A, B).$$

For  $A=[1, 2]$  and  $B=[1, 2, 3, 4]$ .



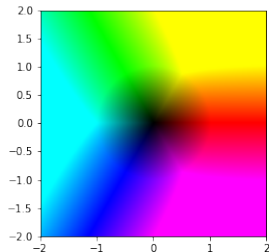
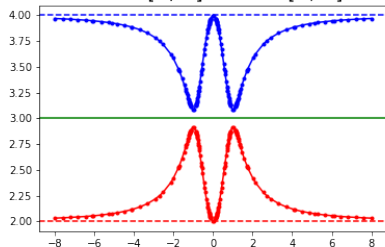
For  $A=[1, 2]$  and  $B=[1, 2]$ .



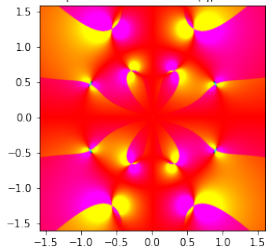
Les fonctions d'enlacement  $q \mapsto L_q(A, B)$  et  $q \mapsto L_q(A^{-1}, B)$  de moyenne  $i(A, B)$ .

# Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour $q$ réel et complexe

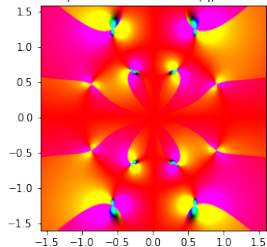
For  $A=[1, 2]$  and  $B=[1, 2]$ .



$q\text{link}([1, 2],[1, 2])$  for  $|q| < 1.6$

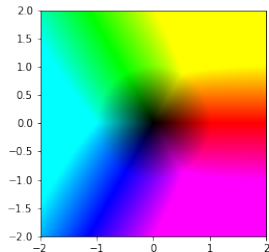
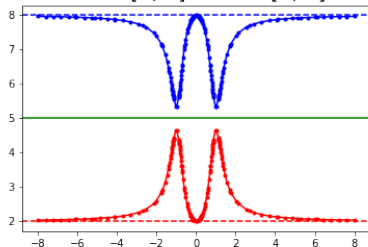


$q\text{link}([1, 2],[2, 1])$  for  $|q| < 1.6$

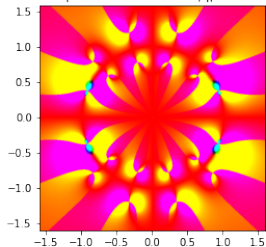


# Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour $q$ réel et complexe

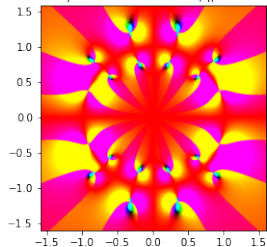
For  $A=[1, 4]$  and  $B=[1, 4]$ .



$q\text{link}([1, 4],[1, 4])$  for  $|q|<1.6$

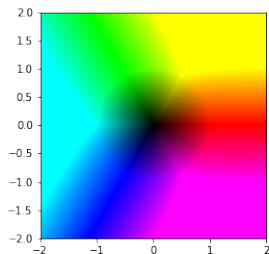
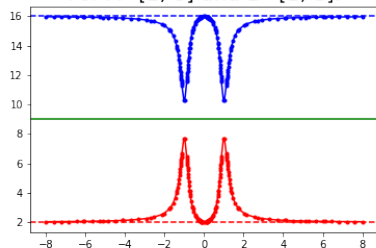


$q\text{link}([1, 4],[4, 1])$  for  $|q|<1.6$

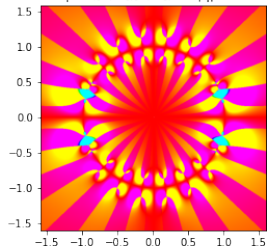


# Graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour $q$ réel et complexe

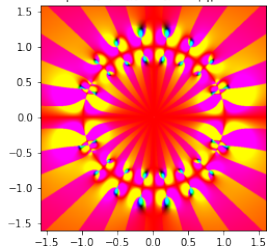
For  $A=[1, 8]$  and  $B=[1, 8]$ .



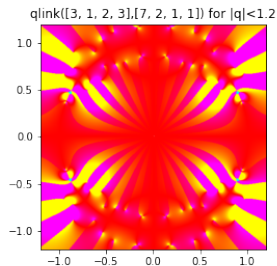
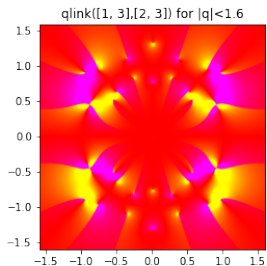
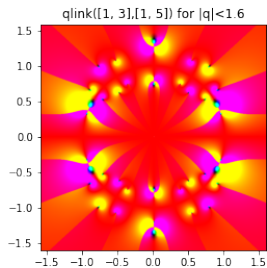
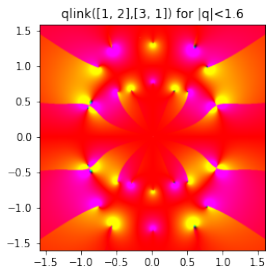
qlink([1, 8],[1, 8]) for  $|q| < 1.6$



qlink([1, 8],[8, 1]) for  $|q| < 1.6$

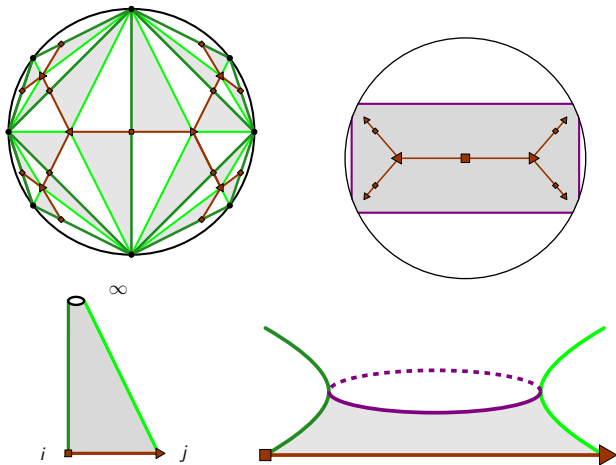


# D'autres graphes de $q \mapsto L_q(A, B)$ pour $q$ complexe



# Preuve utilisant l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent $\mathcal{T}$

Le cœur convexe de  $\mathbf{M}_q$  dans  $\mathbf{HP}$  :  $\frac{1}{q^2}$ -voisinage de  $\mathcal{T}_q$ .



La représentation  $\rho_q$  dégénère vers l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathcal{T}$ .

# Preuve utilisant l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent $\mathcal{T}$

Les angles s'aplatissent  $\theta_q \rightarrow 0 \pmod{\pi}$  donc  $\cos(\theta_q) \rightarrow \pm 1$ .

La somme  $L_q(A, B)$  compte les paires d'axes  $(+1, +1)$  :

|        |    | across |   |   |
|--------|----|--------|---|---|
|        |    | +1     | 0 | 0 |
| cosign | +1 |        |   |   |
|        | -1 |        |   |   |

Dans le fibré tangent unitaire de  $\mathbf{M}_q$ , l'entrelacs  $q$ -modulaire s'isotope dans une surface branchée : le patron de Lorenz.

A la limite on retrouve, en utilisant la topologie du patron de Lorenz, la formule algorithmique pour l'enlacement en termes des  $L&R$ -cycles.

$$\forall A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N}) : \quad \mathrm{lk}(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathrm{len}(A)} \sum_{j=1}^{\mathrm{len}(B)} \mathrm{cross}(\sigma^i A, \sigma^j B)$$

# Bibliography I



Michael Atiyah.

The logarithm of the Dedekind  $\eta$ -function.

*Math. Ann.*, 278(1-4) :335–380, 1987.



Christophe Bavard.

Longueur stable des commutateurs.

*Enseign. Math. (2)*, 37(1-2) :109–150, 1991.



Mladen Bestvina and Koji Fujiwara.

Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups.

*Geom. Topol.*, 6 :69–89, 2002.



Jean Barge and Étienne Ghys.

Cocycles bornés et actions de groupes sur les arbres réels.

In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 617–621.

World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

# Bibliography II



J. Barge and É. Ghys.

Cocycles d'Euler et de Maslov.

*Math. Ann.*, 294(2) :235–265, 1992.



Robert Brooks.

Some remarks on bounded cohomology.

In *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 53–63. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.



Robert Brooks and Caroline Series.

Bounded cohomology for surface groups.

*Topology*, 23(1) :29–36, 1984.



Dennis DeTurck and Herman Gluck.

Electrodynamics and the Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space.

*J. Math. Phys.*, 49(2) :023504, 35, 2008.

# Bibliography III



W. Duke, Ö. Imamoğlu, and Á. Tóth.

Modular cocycles and linking numbers.

*Duke Math. J.*, 166(6) :1179–1210, 2017.



David B. A. Epstein and Koji Fujiwara.

The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups.

*Topology*, 36(6) :1275–1289, 1997.



Koji Fujiwara.

Quasi-homomorphisms on mapping class groups.

In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 241–269. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.



Jean-Marc Gambaudo and Étienne Ghys.

Braids and Signatures.

*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 133(4) :541–579, 2005.

# Bibliography IV



Étienne Ghys.

Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée.

In *The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984)*, volume 58 of *Contemp. Math.*, pages 81–106. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.



Étienne Ghys.

Knots and dynamics.

In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 247–277. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.



Étienne Ghys.

Right-handed vector fields & the Lorenz attractor.

*Jpn. J. Math.*, 4(1) :47–61, 2009.



Étienne Ghys.

*A singular mathematical promenade.*

ENS Editions, 2017.

# Bibliography V



Étienne Ghys and Jos Leys.

Lorenz and modular flows : a visual introduction.

<http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-lorenz>, 2016.



R. I. Grigorchuk.

Some results on bounded cohomology.

In *Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993)*, volume 204 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 111–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.



N. V. Ivanov.

The second bounded cohomology group.

*Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 167(Issled. Topol. 6) :117–120, 191, 1988.



Svetlana Katok.

Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms.

*Invent. Math.*, 80(3) :469–480, 1985.

# Bibliography VI



Shigenori Matsumoto and Shigeyuki Morita.

Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms.

*Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(3) :539–544, 1985.



Christopher-Lloyd Simon.

*Arithmetic and Topology of Modular knots.*

Thèse, Université de Lille, June 2022.

[HAL version.](#)



Christopher-Lloyd Simon.

Conjugacy classes in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ .

*Mathematics Research Reports*, 4 :23–45, 2023.

[arXiv version.](#)



Christopher-Lloyd Simon.

Linking numbers of modular knots.

*Geometry and Topology*, 29(6) :3241–3270, 2025.